2020학년도 대학수학능력시험 대비
2019학년도 3월 고3 전국연합학력평가 (수학)
4점 문제 해설

※ 본문을 읽기 전에, 먼저 읽어주세요!

1) 해당 모의고사의 문제에 대한 저작권은 **서울특별시교육청에** 있습니다.

2) 본 해설은 필자가 단독으로 다른 해설을 참고하지 않고 만들어낸 것이므로 다소 매끄럽지 않은 부분이 있을 수도 있습니다. 양해 부탁드립니다.

3) 이 문서는 재가공하여 판매하는 등의 **영리를 취할 목적으로 이용하지 않는 한** 누구나 자유롭게 열람, 배포, 이용할 수 있습니다. (교육 목적으로 여러 사람에게 배포되는 경우, 저작자만 명시해주시면 됩니다.)

4) 이 문서를 통해 많은 분들이 도움을 받으셨으면 좋겠습니다.

* 제작자: 그린란드(이재종)
(http://blog.naver.com/wowhd93)
* 최종 수정일자: 2019. 3. 8. 17:30

‘가’ 형

Problem #14

14. 함수 $f(x)=x^3-5x^2+9x-5$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 할 때, 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(4,\ g(4))$ 에서의 접선의 기울기는? [4점]

① $\frac{1}{18}$ ② $\frac{1}{12}$ ③ $\frac{1}{9}$ ④ $\frac{5}{36}$ ⑤ $\frac{1}{6}$

Solution

$g(4)=k$라 하면 역함수의 정의에 의하여

$f(k)=k^3-5k^2+9k-5=4 \Rightarrow k=3$

$f'(x)=3x^2-10x+9$이므로

역함수의 미분법에 의하여

곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(4,\ g(4))$에서의 접선의 기울기는

$$g'(4)=\frac{1}{f'(g(4))}=\frac{1}{f'(3)}=\frac{1}{6}$$

정답: ⑤

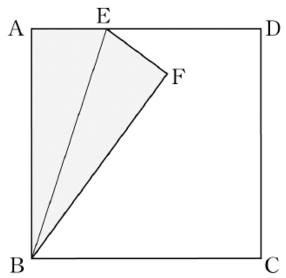
Problem #15

15. 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정사각형 ABCD가 있다. 선분 AD 위의 점 E와 정사각형 ABCD의 내부에 있는 점 F가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 두 삼각형 ABE와 FBE는 서로 합동이다.

(나) 사각형 ABFE의 넓이는 $\frac{1}{3}$이다.

$\tan(\angle \mathrm{ABF})$의 값은? [4점]



① $\frac{5}{12}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{7}{12}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{3}{4}$

Solution

조건 (가), (나)에 의하여 $\triangle \mathrm{ABE}=\frac{1}{6}$입니다.

이때 $\overline{\mathrm{AB}}=1$이므로 $\overline{\mathrm{AE}}=\frac{1}{3}$

$$\therefore \tan(\angle \mathrm{ABE})=\frac{\overline{\mathrm{AE}}}{\overline{\mathrm{AB}}}=\frac{1}{3}$$

$$\therefore \tan(\angle \mathrm{ABF})=\tan(2\angle \mathrm{ABE})$$

$$=\frac{2\tan(\angle \mathrm{ABE})}{1-\tan^2(\angle \mathrm{ABE})}=\frac{2/3}{1-1/9}=\frac{3}{4}$$

정답: ⑤

Problem #16

16. 전체집합 $U=\{1,2,3,4,5\}$ 의 두 부분집합 $A,\ B$가

$n(A\cap B)=1,\ n(A\cup B)=3$

을 만족시킨다. 집합 $A,\ B$의 모든 순서쌍 $(A,\ B)$의 개수는? [4점]

① 80 ② 90 ③ 100 ④ 110 ⑤ 120

Solution

1) $A\cup B$를 결정하는 방법의 수는 ${}_5\mathrm{C}_3=10$(가지)

2) $A\cup B$를 결정하였을 때,
$A\cap B$를 결정하는 방법의 수는
$A\cup B$의 3개의 원소 중 하나를 고르는 방법의 수
이므로 ${}_3\mathrm{C}_1=3$(가지)

3) $A\cup B$와 $A\cap B$가 모두 결정되었을 때, A와 B를
각각 결정하는 방법의 수는
집합 $(A\cup B)-(A\cap B)$의 2개의 원소를 두 집합에
분할하여 넣는 방법의 수이므로 $2^2=4$(가지)

1)~3)에서 집합 $A,\ B$의 순서쌍 $(A,\ B)$의 개수는

$$10\times3\times2^2=120\text{(가지)}$$

정답: ⑤

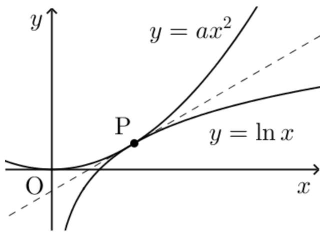
Problem #17

17. 두 함수 $f(x)=ax^2\,(a>0)$, $g(x)=\ln x$ 의 그래프가 한 점 P에서 만나고, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 P에서의 접선의 기울기와 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 P에서의 접선의 기울기가 서로 같다. 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는? (단, a는 상수이다.) [4점]

① $\dfrac{2\sqrt{e}-3}{6}$ ② $\dfrac{2\sqrt{e}-3}{3}$ ③ $\dfrac{\sqrt{e}-1}{2}$
④ $\dfrac{4\sqrt{e}-3}{6}$ ⑤ $\sqrt{e}-1$

Solution

문제의 상황은 오른쪽 그림과 같습니다.



점 P의 좌표를 $(t,\ at^2)$이라 두면

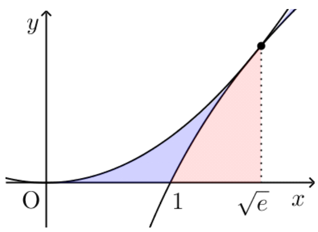
점 P는 $y=\ln x$ 위의 점이므로 $at^2=\ln t\ \cdots\ (1)$

한편 점 P에서 그은 두 곡선의 접선의 기울기가 서로 같으므로

$$2at=\frac{1}{t}\ \Rightarrow\ 2at^2=1\ \cdots\ (2)$$

(1), (2)를 연립하여 풀면 $a=\dfrac{1}{2e}$, $t=\sqrt{e}$

이때 구하는 영역의 넓이는 오른쪽 그림과 같이



$$\int_0^{\sqrt{e}}\frac{1}{2e}x^2\,dx-\int_1^{\sqrt{e}}\ln x\,dx$$

$$=\left[\frac{1}{6e}x^3\right]_0^{\sqrt{e}}-\left[x\ln x-x\right]_1^{\sqrt{e}}$$

$$=\frac{\sqrt{e}}{6}-\left[\frac{\sqrt{e}}{2}-\sqrt{e}+1\right]=\frac{2\sqrt{e}-3}{3}$$

정답: ②

Problem #18

18. 네 개의 비어 있는 상자 A, B, C, D가 있다. 각각의 상자에 최대 5개의 공을 넣을 수 있을 때, 네 상자 A, B, C, D에 $n\,(1\le n\le 20)$개의 공을 남김없이 나누어 넣는 경우의 수를 $f(n)$이라 하자. 다음은 $f(15)+f(14)+f(13)$의 값을 구하는 과정이다. (단, 공은 구별하지 않고, 공을 하나도 넣지 않은 상자가 있을 수 있다.)

> 네 상자 A, B, C, D에 n개의 공을 남김없이 나누어 넣는 경우의 수는 공이 5개씩 모두 20개가 들어 있는 네 상자 A, B, C, D에서 총 $20-n$개의 공을 꺼내는 경우의 수와 같다.
>
> (i) $n=15$인 경우
> 공이 5개씩 모두 20개가 들어 있는 네 상자 A, B, C, D에서 총 5개의 공을 꺼내는 경우의 수와 같으므로
> $f(15)=$ (가)
>
> (ii) $n=14$인 경우
> 공이 5개씩 모두 20개가 들어 있는 네 상자 A, B, C, D에서 총 6개의 공을 꺼내는 경우의 수와 같으므로
> $f(14)={}_4H_6-$ (나)
>
> (iii) $n=13$인 경우
> 공이 5개씩 모두 20개가 들어 있는 네 상자 A, B, C, D에서 총 7개의 공을 꺼내는 경우의 수와 같으므로
> $f(13)=$ (다)
>
> (i), (ii), (iii)에 의해
> $f(15)+f(14)+f(13)=$ (가) $+\left({}_4H_6-\right.$ (나) $\left.\right)+$ (다)
> 이다.

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 수를 각각 p, q, r라 할 때, $p+q+r$의 값은? [4점]

① 164 ② 168 ③ 172 ④ 176 ⑤ 180

Solution

(가): 네 상자 A, B, C, D에서 꺼내는 공의 개수를 각각 x_1, x_2, x_3, x_4라 하면

$0\le x_i\le 5\ (i=1,\ 2,\ 3,\ 4)$이므로

$f(15)$는 $x_1+x_2+x_3+x_4=5$의 음이 아닌 정수해의 개수와 같습니다.

$\therefore\ f(15)={}_4H_5={}_8C_3=56 \qquad \Rightarrow\quad p=56$

(나): 이 경우 (가)에서

$x_1+x_2+x_3+x_4=6$를 만족하는 모든 음이 아닌 정수해 중에서 $x_1 \sim x_4$ 중 하나가 6이 되는 경우만 제외하면 됩니다.

$\therefore\ f(14)={}_4\mathrm{H}_6-4 \qquad \Rightarrow \quad q=4$

(다): 비슷한 방법으로 구하는 경우의 수는 $x_1+x_2+x_3+x_4=7$를 만족하는 모든 음이 아닌 정수해 중에서

(i) $x_1 \sim x_4$ 중 하나가 7이 되는 경우

(ii) $x_1 \sim x_4$ 중 2개가 각각 6, 1인 경우

를 제외하면 됩니다.

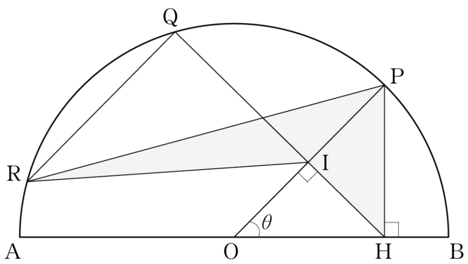
$\therefore\ f(13)={}_4\mathrm{H}_7-4-{}_4\mathrm{P}_2=104 \qquad \Rightarrow \quad r=104$

$\therefore\ p+q+r=56+4+104=164$

정답: ①

Problem #19

19. 그림과 같이 중심이 O이고 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원이 있다. 호 AB 위의 점 P에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H라 하고, 점 H를 지나고 선분 OP에 수직인 직선이 선분 OP, 호 AB와 만나는 점을 각각 I, Q라 하자. 점 Q를 지나고 직선 OP에 평행한 직선이 호 AB와 만나는 점 중 Q가 아닌 점을 R라 하자. $\angle \mathrm{POB}=\theta$일 때, 두 삼각형 RIP, IHP의 넓이를 각각 $S(\theta)$, $T(\theta)$라 하자. $\displaystyle\lim_{\theta\to 0+}\frac{S(\theta)-T(\theta)}{\theta^3}$의 값은? (단, $0<\theta<\frac{\pi}{2}$) [4점]



① $\frac{\sqrt{2}-1}{4}$ ② $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$ ③ $\sqrt{2}-1$
④ $\frac{2\sqrt{2}-1}{4}$ ⑤ $\frac{2\sqrt{2}-1}{2}$

Solution

$S(\theta)=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{IP}}\cdot\overline{\mathrm{IQ}}$, $T(\theta)=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{IP}}\cdot\overline{\mathrm{IH}}$이므로

$S(\theta)-T(\theta)=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{IP}}\left(\overline{\mathrm{IQ}}-\overline{\mathrm{IH}}\right)$

직각삼각형 OHP에서

$\overline{\mathrm{OH}}=\overline{\mathrm{OP}}\cos\theta=\cos\theta$

$\Rightarrow\ \overline{\mathrm{OI}}=\overline{\mathrm{OH}}\cos\theta=\cos^2\theta$

$\therefore\ \overline{\mathrm{IP}}=\overline{\mathrm{OP}}-\overline{\mathrm{OI}}=1-\cos^2\theta=\sin^2\theta$

$\quad\ \overline{\mathrm{IH}}=\overline{\mathrm{OH}}\sin\theta=\cos\theta\sin\theta$

직각삼각형 OIQ에서

$\overline{\mathrm{IQ}}=\sqrt{(\overline{\mathrm{OQ}})^2-(\overline{\mathrm{OI}})^2}=\sqrt{1-\cos^4\theta}$

$=\sqrt{1-\cos^2\theta}\,\sqrt{1+\cos^2\theta}=\sin\theta\sqrt{1+\cos^2\theta}$

$\therefore\ S(\theta)-T(\theta)=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{IP}}\left(\overline{\mathrm{IQ}}-\overline{\mathrm{IH}}\right)$

$=\frac{1}{2}\sin^2\theta\left(\sin\theta\sqrt{1+\cos^2\theta}-\cos\theta\sin\theta\right)$

$=\frac{1}{2}\sin^3\theta\left(\sqrt{1+\cos^2\theta}-\cos\theta\right)$

$\therefore\ \displaystyle\lim_{\theta\to 0+}\frac{S(\theta)-T(\theta)}{\theta^3}$

$=\displaystyle\frac{1}{2}\lim_{\theta\to 0+}\frac{\sin^3\theta}{\theta^3}\left(\sqrt{1+\cos^2\theta}-\cos\theta\right)=\frac{\sqrt{2}-1}{2}$

정답: ②

Problem #20

20. 함수 $f(x)=x^2+ax+b\left(0<b<\frac{\pi}{2}\right)$에 대하여 함수 $g(x)=\sin(f(x))$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x에 대하여 $g'(-x)=-g'(x)$이다.
(나) 점 $(k, g(k))$는 곡선 $y=g(x)$의 변곡점이고, $2kg(k)=\sqrt{3}g'(k)$이다.

두 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은? [4점]

① $\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ② $\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{3}$ ③ $\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{6}$
④ $\frac{\pi}{2}-\frac{\sqrt{3}}{3}$ ⑤ $\frac{\pi}{2}-\frac{\sqrt{3}}{6}$

Solution

조건 (가)의 양변에 $x=0$을 대입하면

$g'(0) = -g'(0) \Rightarrow g'(0) = 0$

$f'(x) = 2x+a,\ g'(x) = f'(x)\cos(f(x))$에서
$g'(0) = f'(0)\cos(f(0)) = a\cos b = 0$

이때 $0 < b < \frac{\pi}{2}$이므로 $\cos b \neq 0$ $\quad \therefore a = 0$

$g(x) = \sin(x^2+b)$이므로
$g'(x) = 2x\cos(x^2+b)$
$g''(x) = 2\cos(x^2+b) - 4x^2\sin(x^2+b)$

조건 (나)에 의하여
(i) $g''(k) = 0 \Rightarrow \cos(k^2+b) = 2k^2\sin(k^2+b)$
(ii) $2kg(k) = \sqrt{3}\,g'(k)$
$\Rightarrow 2k\sin(k^2+b) = 2\sqrt{3}\,k\cos(k^2+b)$

(i), (ii)를 연립하면
$\cos(k^2+b) = 2\sqrt{3}\,k^2\cos(k^2+b)$
$\Rightarrow \cos(k^2+b)(2\sqrt{3}\,k^2-1) = 0$

1) $\cos(k^2+b) = 0$인 경우
(i)에서 $2k^2\sin(k^2+b) = 0$이고
$\sin(k^2+b) = \pm 1$이므로 $k=0$이어야 합니다.
즉, $\cos b = 0$이므로 주어진 조건에 모순입니다.

2) $2\sqrt{3}\,k^2 = 1 \Rightarrow k^2 = \frac{1}{2\sqrt{3}}$인 경우

(i)에서 $\cos(k^2+b) = \frac{1}{\sqrt{3}}\sin(k^2+b)$

$\cos^2(k^2+b) + \sin^2(k^2+b) = 1$이므로

$\frac{4}{3}\sin^2(k^2+b) = 1 \Rightarrow \sin^2(k^2+b) = \frac{3}{4}$

이때 $0 < k^2 < \frac{\pi}{6}$이므로 $\left(\because \frac{1}{2\sqrt{3}} < \frac{1}{2} < \frac{\pi}{6}\right)$

$0 < k^2+b < \frac{2\pi}{3}$ $\quad \therefore \sin(k^2+b) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore k^2+b = \frac{\pi}{3} \Rightarrow b = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{6}$

$\therefore a+b = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{6}$

정답: ③

Problem #21

21. 함수 $f(x)$의 도함수가 $f'(x) = xe^{-x^2}$이다. 모든 실수 x에 대하여 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

(가) $g(x) = \int_1^x f'(t)(x+1-t)dt$
(나) $f(x) = g'(x) - f'(x)$

< 보 기 >

ㄱ. $g'(1) = \frac{1}{e}$
ㄴ. $f(1) = g(1)$
ㄷ. 어떤 양수 x에 대하여 $g(x) < f(x)$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

Solution

ㄱ) $g(x) = \int_1^x f'(t)(x+1-t)\,dt$

$= x\int_1^x f'(t)dt + \int_1^x f'(t)(1-t)\,dt$

$\Rightarrow g'(x) = \int_1^x f'(t)dt + xf'(x) + (1-x)f'(x)$

$= \int_1^x f'(t)dt + f'(x)$

$\therefore g'(1) = f'(1) = e^{-1} = \frac{1}{e}$

(참)

ㄴ) ㄱ에서 $g'(x) - f'(x) = \int_1^x f'(t)\,dt$

조건 (나)에 의하여 $\int_1^x f'(t)dt = f(x)$ $\quad \therefore f(1) = 0$

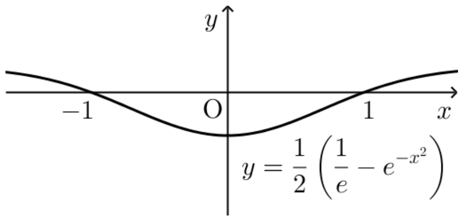
(가)에서 $g(1) = 0$이므로 $\therefore f(1) = g(1) = 0$

(참)

ㄷ) $g'(x) - f'(x) = \int_1^x f'(t)dt$

$= \int_1^x te^{-t^2}dt = \left[-\frac{1}{2}e^{-t^2}\right]_1^x = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{e} - e^{-x^2}\right)$

이때 함수 $y=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{e}-e^{-x^2}\right)$의 그래프의 개형은 아래와 같습니다.



즉, $g'(x)-f'(x)$의 부호가 $x=1$의 좌우에서 음에서 양으로 바뀌므로 함수 $g(x)-f(x)$는 $x=1$에서 극소이면서 구간 $(0, \infty)$에서는 최소입니다.

이때 $g(1)-f(1)=0$이므로
구간 $(0, \infty)$에서 함수 $g(x)-f(x)$는 $x=1$일 때 최솟값 0을 가집니다.

따라서 임의의 양수 x에 대하여 $g(x)-f(x)\geq 0$이고, $g(x)<f(x)$인 양수 x는 존재하지 않습니다.

(거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ입니다.

정답: ②

Problem #26

26. $0\leq x\leq\pi$일 때, 2 이상의 자연수 n에 대하여 두 곡선 $y=\sin x$와 $y=\sin(nx)$의 교점의 개수를 a_n이라 하자. a_3+a_5의 값을 구하시오. [4점]

Solution

$\sin x=\sin(nx)$

$\Leftrightarrow$ (i) $nx-x=(n-1)x=2k\pi$ 또는

[각 x와 nx를 나타내는 동경이 일치하는 경우]

(ii) $nx+x=(n+1)x=(2k+1)\pi$ (k는 정수)

[각 x와 nx를 나타내는 동경이 y축 대칭인 경우]

이므로

1) $n=3$인 경우

(i) $x=k\pi$ 이고 $0\leq x\leq\pi$이므로 $x=0$ or $x=\pi$

(ii) $x=\frac{2k+1}{4}\pi$이고 $0\leq x\leq\pi$이므로

$x=\frac{\pi}{4}$ or $x=\frac{3\pi}{4}$

$\therefore$ $a_3=4$

2) $n=5$인 경우

(i) $x=\frac{k}{2}\pi$이고 $0\leq x\leq\pi$이므로

$x=0$ or $x=\frac{\pi}{2}$ or $x=\pi$

(ii) $x=\frac{2k+1}{6}\pi$이고 $0\leq x\leq\pi$이므로

$x=\frac{\pi}{6}$ or $x=\frac{\pi}{2}$ or $x=\frac{5\pi}{6}$

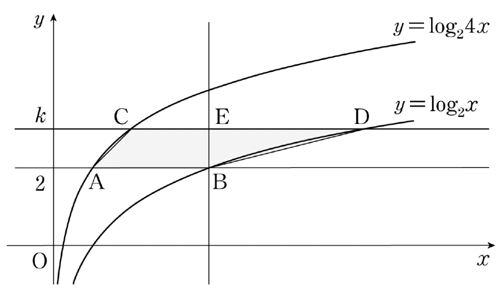
$\therefore$ $a_5=5$

$\therefore$ $a_3+a_5=9$

정답: 9

Problem #27

27. 그림과 같이 직선 $y=2$가 두 곡선 $y=\log_2 4x$, $y=\log_2 x$와 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 직선 $y=k$ $(k>2)$가 두 곡선 $y=\log_2 4x$, $y=\log_2 x$와 만나는 점을 각각 C, D라 하자. 점 B를 지나고 y축과 평행한 직선이 직선 CD와 만나는 점을 E라 하면 점 E는 선분 CD를 $1:2$로 내분한다. 사각형 ABDC의 넓이를 S라 할 때, $12S$의 값을 구하시오. [4점]



Solution

점 A, B의 좌표는 각각 $(1, 2)$, $(4, 2)$이므로

$\therefore$ $\overline{AB}=3$

점 $E(4, k)$이고, $\overline{CE}=m$이라 하면 $\overline{DE}=2m$이므로

점 C, D의 좌표는 각각 $(4-m, k)$, $(4+2m, k)$

$\Rightarrow \log_2 4(4-m) = \log_2(4+2m) = k$

$\Rightarrow 16-4m = 4+2m = 2^k$

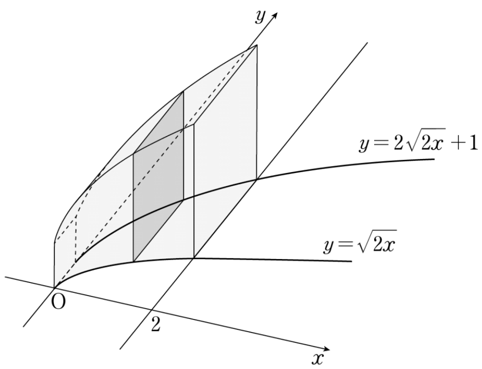
$\therefore\ m=2,\ k=3 \quad \Rightarrow \quad \overline{\mathrm{CD}} = 6$

$\therefore\ S = \dfrac{1}{2}\times(\overline{\mathrm{AB}}+\overline{\mathrm{CD}})\times(k-2) = \dfrac{9}{2} \ \Rightarrow\ 12S = 54$

정답: 54

Problem #28

28. 그림과 같이 두 곡선 $y=2\sqrt{2x}+1$, $y=\sqrt{2x}$ 와 y축 및 직선 $x=2$로 둘러싸인 도형을 밑면으로 하는 입체도형이 있다. 이 입체도형을 x축에 수직인 평면으로 자른 단면이 모두 정사각형일 때, 이 입체도형의 부피를 V라 하자. $30V$의 값을 구하시오. [4점]



Solution

$x=t$일 때 단면의 넓이를 $S(t)$라 하면

$S(t) = (2\sqrt{2t}+1-\sqrt{2t})^2 = (\sqrt{2t}+1)^2$

$$\therefore\ V = \int_0^2 S(t)\,dt = \int_0^2 (\sqrt{2t}+1)^2\,dt$$

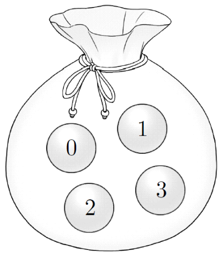
$$= \int_0^2 (2t+2\sqrt{2t}+1)dt$$

$$= \left[t^2+t+\frac{4\sqrt{2}}{3}t^{\frac{3}{2}}\right]_0^2 = \frac{34}{3} \ \Rightarrow\ 30V = 340$$

정답: 340

Problem #29

29. 주머니 속에 네 개의 숫자 0, 1, 2, 3이 각각 하나씩 적혀 있는 공 4개가 들어 있다. 이 주머니에서 1개의 공을 꺼내어 공에 적혀 있는 수를 확인한 후 다시 넣는다. 이 과정을 3번 반복할 때, 꺼낸 공에 적혀 있는 수를 차례로 a, b, c라 하자. $\dfrac{bc}{a}$가 정수가 되도록 하는 모든 순서쌍 (a, b, c)의 개수를 구하시오. [4점]



Solution

$a \neq 0$이므로 다음과 같이 나누어 생각합니다.

1) <u>$a=1$인 경우</u>

b와 c는 어떤 수가 나오더라도 $\dfrac{bc}{a}$는 정수입니다.

따라서 순서쌍 (a, b, c)의 개수는 $4^2 = 16$

2) <u>$a=2$인 경우</u>

b와 c 중 적어도 하나는 0 또는 2여야 합니다.
따라서 가능한 모든 경우 중에서 b와 c가 모두 1과 3 중 하나인 경우만 제외하면 됩니다.

따라서 순서쌍 (a, b, c)의 개수는 $4^2-2^2 = 12$

3) <u>$a=3$인 경우</u>

b와 c 중 적어도 하나는 0 또는 3이어야 합니다.
따라서 가능한 모든 경우 중에서 b와 c가 모두 1과 2 중 하나인 경우만 제외하면 됩니다.

따라서 순서쌍 (a, b, c)의 개수는 $4^2-2^2 = 12$

1)~3)에서 문제의 조건을 만족하는 순서쌍 (a, b, c)의 개수는 $16+12+12 = 40$

정답: 40

Problem #30

30. 다음 조건을 만족시키며 최고차항의 계수가 1인 모든 사차함수 $f(x)$에 대하여 $f(0)$의 최댓값과 최솟값의 합을 구하시오. (단, $\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x}=0$) [4점]

(가) $f(1)=0$, $f'(1)=0$

(나) 방정식 $f(x)=0$의 모든 실근은 10 이하의 자연수이다.

(다) 함수 $g(x)=\frac{3x}{e^{x-1}}+k$에 대하여 함수 $|(f\circ g)(x)|$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하도록 하는 자연수 k의 개수는 4이다.

Solution

(가)에서 다항식 $f(x)$는 $(x-1)^2$을 인수로 갖고,
$f(x)=0$이 $x=1$ 이외의 다른 실근을 갖지 않거나
또 다른 중근을 갖는 경우
임의의 실수 x에 대하여 $f(x)\geq 0$이므로
함수 $|(f\circ g)(x)|$는 k의 값에 관계없이 실수 전체에서 미분가능합니다.

즉, (나)와 (다)로부터

$f(x)=(x-1)^2(x-\alpha)(x-\beta)$
(α, β는 $\alpha<\beta\leq 10$인 자연수)

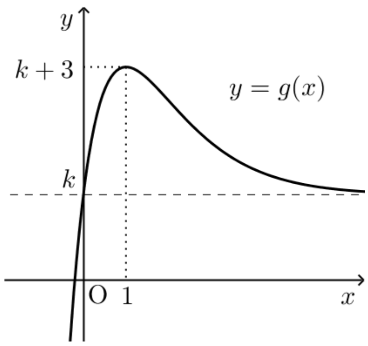
이때 $f(0)=\alpha\beta$이므로 $\alpha\beta$가 최대가 되는 경우와 최소가 되는 경우를 찾으면 됩니다.

실수 전체에서 미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여
함수 $|f(x)|$는 $\underline{f(x)=0\text{이고 } f'(x)\neq 0}$인 점에서만 미분가능하지 않으므로
함수 $|(f\circ g)(x)|$는 합성함수 미분법에서
$\underline{f(g(x))=0\text{이고 } f'(g(x))\neq 0,\ g'(x)\neq 0}$인 점에서만 미분가능하지 않습니다. … (*)

$g(x)=3x\,e^{1-x}+k$에 대하여
$g'(x)=3e^{1-x}(1-x)$이므로
함수 $g(x)$는 $x=1$에서 극댓값 $k+3$을 갖고,

$\lim_{x\to\infty}g(x)=k$이므로 곡선 $y=g(x)$는 직선 $y=k$를 점근선으로 갖습니다.

이를 이용하여 함수 $g(x)$의 그래프를 그리면



따라서 모든 실수 x에 대하여 $g(x)\leq k+3$입니다.

다시 말하면, 함수 $(f\circ g)(x)=f(g(x))$는 구간 $(-\infty,\ k+3]$에서 정의된 함수 $f(x)$를 보는 것과 다르지 않습니다.

(1) $\underline{f(0)=\alpha\beta\text{가 최대가 되는 경우}}$

(*)에서 함수 $|(f\circ g)(x)|$는 미분가능하지 않은 점은 $g(x)=\alpha$ 또는 $g(x)=\beta$가 되는 점입니다.

$\alpha<\beta$이므로 함수 $|(f\circ g)(x)|$가 실수 전체에서 미분가능하려면
- $\alpha=1$이고 $\beta\geq k+3$ 또는
- $\alpha\geq k+3$

이어야 합니다. … (**)

* $g(x)=k+3 \Rightarrow g'(x)=0$이므로
α 또는 β가 $k+3$인 경우 또한 함수 $|(f\circ g)(x)|$는 실수 전체에서 미분가능합니다.

이때 $\alpha\beta$의 값이 최대가 되는 경우는
α, β의 값이 조건을 만족하며 각자 가장 큰 경우이므로
$\alpha\geq k+3$ & (다) $\Rightarrow$ $\alpha=7$ 이고
$\alpha<\beta\leq 10$으로부터 $\beta=10$인 경우입니다.

따라서 $f(0)=\alpha\beta$의 최댓값은 70입니다.

(2) $\underline{f(0)=\alpha\beta\text{가 최소가 되는 경우}}$

(1)의 (**)에서 $\alpha=1$, $\beta=7$이 되는 경우가
$\alpha\beta$의 값이 가장 작은 경우임을 알 수 있습니다.

(1), (2)에서 $f(0)$의 최댓값과 최솟값의 합은 77입니다.

정답: 77

'나' 형

Problem #14

14. 실수 x에 대한 두 조건 p, q가 다음과 같다.

$p: x \le -5$ 또는 $x > 3$,

$q: x = \dfrac{2a+1}{3}$

$\sim p$가 q이기 위한 필요조건이 되도록 하는 정수 a의 최솟값과 최댓값의 합은? [4점]

① -6 ② -5 ③ -4 ④ -3 ⑤ -2

Solution

조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P^c = \{x \mid -5 < x \le 3\}$

$Q = \left\{\dfrac{2a+1}{3}\right\}$

문제에서 $Q \subset P^c$이므로

$-5 < \dfrac{2a+1}{3} \le 3 \Rightarrow -8 < a \le 4$

따라서 정수 a의 최댓값과 최솟값의 합은

$-7+4 = -3$

정답: ④

Problem #15

15. 자연수 n에 대하여 $n(n-4)$의 세제곱근 중 실수인 것의 개수를 $f(n)$이라 하고, $n(n-4)$의 네제곱근 중 실수인 것의 개수를 $g(n)$이라 하자. $f(n) > g(n)$을 만족시키는 모든 n의 값의 합은? [4점]

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

Solution

임의의 실수의 세제곱근 중 실수인 것의 개수는

항상 1개이므로 모든 n에 대하여 $f(n) = 1$입니다.

따라서 $f(n) > g(n)$이려면 $g(n) = 0$이어야 합니다.

즉, $n(n-4)$의 네제곱근 중 실수인 것의 개수가

0이려면 $n(n-4) < 0$이어야 합니다. $\therefore\ 0 < n < 4$

따라서 조건을 만족하는 모든 자연수 n의 값의 합은

$1+2+3 = 6$

정답: ③

Problem #16

16. 첫째항이 양수이고 공비가 -2인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\sum_{k=1}^{9}(|a_k|+a_k) = 66$$

일 때, a_1의 값은? [4점]

① $\dfrac{3}{31}$ ② $\dfrac{5}{31}$ ③ $\dfrac{7}{31}$ ④ $\dfrac{9}{31}$ ⑤ $\dfrac{11}{31}$

Solution

$$|a_k| + a_k = \begin{cases} 2a_k & (a_k \ge 0) \\ 0 & (a_k < 0) \end{cases}$$ 이고

문제의 조건으로부터 자연수 n에 대하여

$a_{2n-1} > 0$, $a_{2n} < 0$이므로

$$\sum_{k=1}^{9}(|a_k|+a_k) = 2(a_1+a_3+a_5+a_7+a_9) = 66$$

$\therefore\ a_1+a_3+a_5+a_7+a_9 = 33$

한편 수열 $\{a_{2n-1}\}$의 공비는 $(-2)^2 = 4$이므로

등비수열의 합의 공식에서

$$a_1+a_3+a_5+a_7+a_9 = \frac{a_1(4^5-1)}{4-1} = 341a_1$$

$\Rightarrow 341a_1 = 33 \quad \therefore\ a_1 = \dfrac{3}{31}$

정답: ①

Problem #17

17. 자연수 k에 대하여 함수

$$f(x)=\left|\frac{k}{2x}-2\right| \quad (x>0)$$

의 그래프와 x축의 교점을 A, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 Q라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

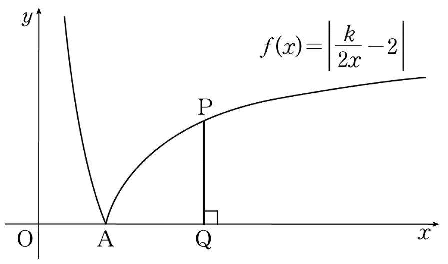
< 보 기 >

ㄱ. 점 A의 좌표는 $\left(\frac{k}{4},\ 0\right)$이다.

ㄴ. 점 P의 x좌표가 점 A의 x좌표보다 클 때, 선분 PQ의 길이는 2보다 작다.

ㄷ. 점 P의 x좌표가 k일 때, 삼각형 AQP의 넓이가 자연수가 되도록 하는 k의 최솟값은 16이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ



Solution

ㄱ) 점 A의 x좌표는 $f(x)=0$의 실근이므로

$$\frac{k}{2x}-2=0 \Rightarrow x=\frac{k}{4}$$

따라서 점 A의 좌표는 $\left(\frac{k}{4},\ 0\right)$입니다.

(참)

ㄴ) 점 P의 x좌표가 점 A의 x좌표보다 클 때,

$f(x)=-\left(\frac{k}{2x}-2\right)=2-\frac{k}{2x}$로 주어지고

x와 k는 모두 양수이므로 $\frac{k}{2x}>0$입니다.

따라서 이 경우 $f(x)<2$이고, 선분 PQ의 길이는 2보다 항상 작음을 알 수 있습니다.

(참)

ㄷ) $f(k)=\left|\frac{k}{2k}-2\right|=\frac{3}{2}$이므로 $\overline{\mathrm{PQ}}=\frac{3}{2}$이고,

$\overline{\mathrm{AQ}}=\left|k-\frac{k}{4}\right|=\frac{3k}{4}$이므로

삼각형 AQP의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{PQ}}\times\overline{\mathrm{AQ}}=\frac{9k}{16}$이고, 이 값이 자연수가 되려면

k는 16의 배수여야 합니다.

따라서 k의 최솟값은 16입니다.

(참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ입니다.

정답: ⑤

Problem #18

18. 자연수 n에 대하여 원점을 지나는 직선과

곡선 $y=-(x-n)(x-n-2)$가 제1사분면에서 접할 때,

접점의 x좌표를 a_n, 직선의 기울기를 b_n이라 하자.

다음은 $\lim_{n\to\infty} a_n b_n$의 값을 구하는 과정이다.

원점을 지나고 기울기가 b_n인 직선의 방정식은 $y=b_n x$이다.
이 직선이 곡선 $y=-(x-n)(x-n-2)$에 접하므로
이차방정식 $b_n x=-(x-n)(x-n-2)$의 근 $x=a_n$은
중근이다.
그러므로 이차방정식

$$x^2+\{b_n-2(n+1)\}x+n(n+2)=0$$

에서 이차식

$$x^2+\{b_n-2(n+1)\}x+n(n+2)$$

는 완전제곱식으로 나타내어진다.
그런데 $a_n>0$이므로

$$x^2+\{b_n-2(n+1)\}x+n(n+2)=\{x-\sqrt{n(n+2)}\}^2$$

에서

$$a_n=\boxed{(가)},\quad b_n=\boxed{(나)}$$

이다.
따라서 $\lim_{n\to\infty} a_n b_n=\boxed{(다)}$이다.

위의 (가)와 (나)에 알맞은 식을 각각 $f(n)$, $g(n)$이라 하고, (다)에 알맞은 값을 α라 할 때, $2f(\alpha)+g(\alpha)$의 값은? [4점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

Solution

(가), (나): 지문에서 이차방정식

$x^2+\{b_n-2(n+1)\}x+n(n+2)=0$은 조건에 따라

중근 $x=a_n$을 가져야 합니다. 즉,

$x^2+\{b_n-2(n+1)\}x+n(n+2)=(x-a_n)^2$

은 항등식입니다.

위 등식에서 일차항의 계수를 비교하면

$b_n-2(n+1)=-2\sqrt{n(n+2)}$

$\therefore\ b_n=2\left(n+1-\sqrt{n(n+2)}\right)$

상수항을 비교하면

$a_n{}^2=n(n+2)\ \Rightarrow\ a_n=\sqrt{n(n+2)}\ \ (\because\ a_n>0)$

$\therefore\ a_n=\sqrt{n(n+2)}$

$\Rightarrow f(n)=\sqrt{n(n+2)},\ g(n)=2\left(n+1-\sqrt{n(n+2)}\right)$

(다): $\lim\limits_{n\to\infty}a_nb_n$

$$=\lim_{n\to\infty}2\sqrt{n(n+2)}\left(n+1-\sqrt{n(n+2)}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2\sqrt{n(n+2)}\,\{(n+1)^2-n(n+2)\}}{n+1+\sqrt{n(n+2)}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2\sqrt{n^2+2n}}{n+1+\sqrt{n^2+2n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2\sqrt{1+\frac{2}{n}}}{1+\frac{1}{n}+\sqrt{1+\frac{2}{n}}}=1\quad\Rightarrow\ \alpha=1$$

$\therefore\ 2f(\alpha)+g(\alpha)=2\sqrt{3}+2\left(2-\sqrt{3}\right)=4$

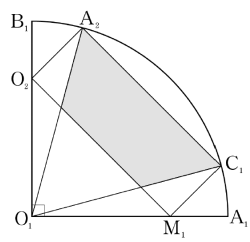
정답: ④

Problem #19

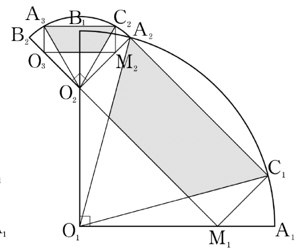
19. 그림과 같이 중심이 O_1, 반지름의 길이가 2이고 중심각의 크기가 $90°$인 부채꼴 $O_1A_1B_1$에서 두 선분 O_1A_1, O_1B_1 위에 두 점 M_1, O_2를 각각 $\overline{O_1M_1}=\frac{\sqrt{2}}{2}\overline{O_1A_1}$, $\overline{O_1O_2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\overline{O_1B_1}$이 되도록 정하자. 두 점 M_1, O_2와 호 A_1B_1 위의 두 점 C_1, A_2를 꼭짓점으로 하는 직사각형 $O_2M_1C_1A_2$를 그리고, 직사각형 $O_2M_1C_1A_2$와 삼각형 $O_1C_1A_2$의 내부의 공통부분에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

그림 R_1에 중심이 O_2, 반지름의 길이가 $\overline{O_2A_2}$이고 중심각의 크기가 $90°$인 부채꼴 $O_2A_2B_2$를 점 B_2가 부채꼴 $O_1A_1B_1$의 외부에 있도록 그리고, 두 선분 O_2A_2, O_2B_2 위에 두 점 M_2, O_3을 각각 $\overline{O_2M_2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\overline{O_2A_2}$, $\overline{O_2O_3}=\frac{\sqrt{2}}{2}\overline{O_2B_2}$가 되도록 정하자. 두 점 M_2, O_3과 호 A_2B_2 위의 두 점 C_2, A_3을 꼭짓점으로 하는 직사각형 $O_3M_2C_2A_3$을 그리고, 직사각형 $O_3M_2C_2A_3$과 삼각형 $O_2C_2A_3$의 내부의 공통부분에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

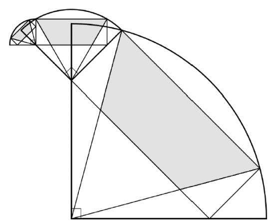
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$의 값은? [4점]



R_1



R_2



R_3 $\cdots$

① $\frac{7}{6}$ ② $\frac{4}{3}$ ③ $\frac{3}{2}$ ④ $\frac{5}{3}$ ⑤ $\frac{11}{6}$

Solution

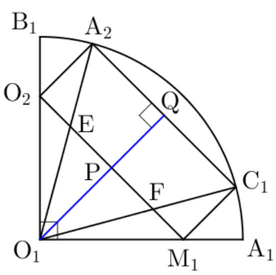
그림 R_1의 직각삼각형 $O_2O_1M_1$에서

문제의 조건으로부터 $\overline{OM_1}=\overline{O_1O_2}=\sqrt{2}$이므로

$\overline{O_1M_1}=2\ \Rightarrow\ \overline{A_2C_1}=2$

따라서 삼각형 $O_1C_1A_2$는 정삼각형입니다.

오른쪽 그림과 같이 점 O_1에서 선분 A_2C_1으로 내린 수선의 발을 Q, 선분 O_2M_1이 선분 O_1A_2, O_1Q, O_1C_1과 만나는 점을 각각 E, P, F라 하면



삼각형 $O_1C_1A_2$는 정삼각형이므로

$$\overline{O_1Q} = \frac{\sqrt{3}}{2}\overline{O_1A_2} = \sqrt{3},$$

직각삼각형 $O_2O_1M_1$에서 $\overline{O_1P} = \frac{1}{2}\overline{O_2M_1} = 1$

따라서 정삼각형 $O_1C_1A_2$와 O_1FE의 닮음비는

$\overline{OP} : \overline{OQ} = 1 : \sqrt{3}$

즉, 두 정삼각형의 넓이비는 $1:3$이므로

그림 R_1에서 색칠된 부분(사다리꼴)의 넓이는

$$\frac{2}{3}\triangle O_1C_1A_2 = \frac{2}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times 2^2 = \frac{2\sqrt{3}}{3} \quad \cdots \ (1)$$

한편, $\overline{PQ} = \overline{O_1Q} - \overline{O_1P} = \sqrt{3}-1$이므로

그림 R_2에서 색칠된 두 도형의 닮음비는

$\overline{OA_1} : \overline{O_2A_2} = \overline{O_1A_1} : \overline{PQ} = 2 : \sqrt{3}-1$이고,

R_2에서 색칠된 큰 도형의 넓이에 대한

작은 도형의 넓이의 비는

$$\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)^2 = \frac{2-\sqrt{3}}{2} \quad \cdots \ (2)$$

이는 일반적으로 R_n에서 색칠된 도형의 넓이에 대한

R_{n+1}에서 색칠된 도형의 넓이의 비와 같습니다.

(1), (2)와 등비급수의 성질로부터

$$\therefore \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{\frac{2\sqrt{3}}{3}}{1-\frac{2-\sqrt{3}}{2}} = \frac{\frac{2\sqrt{3}}{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{4}{3}$$

정답: ②

Problem #20

20. 전체집합 $U=\{x\,|\,x$는 19 이하의 자연수$\}$의 부분집합 A가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 집합 A의 모든 원소 a에 대하여 $2a \notin A$이다.
(나) 집합 A의 모든 원소의 합은 짝수이다.

집합 A의 원소의 개수가 최대일 때, 모든 원소의 합의 최댓값은? [4점]

① 124 ② 132 ③ 140 ④ 148 ⑤ 156

Solution

문제에서 $\{11, 13, 15, 17, 19\} \subset A$ 이어도
조건 (가)에 위배되는 경우는 없습니다.
집합 A의 원소의 개수가 최대여야 하므로
$\{11, 13, 15, 17, 19\} \subset A$ 이어야 합니다.

위의 다섯 개의 원소를 제외한 U의 14개의 원소를
(홀수)$\times 2^n$ 꼴의 수들을 모은 집합으로 다음과 같이
분할합니다.

$P_1 = \{1, 2, 4, 8, 16\}$, $P_2 = \{3, 6, 12\}$,

$P_3 = \{5, 10\}$, $P_4 = \{7, 14\}$, $P_5 = \{9, 18\}$

위의 각 집합에서 조건 (가)를 만족하면서 집합 A의
원소의 개수가 최대가 되도록 집합 A의 원소를 선택
하기 위해서는 반드시
집합 P_1에서는 1, 4, 16을 선택하고
집합 P_2에서는 3, 12를 선택해야 합니다.

집합 P_3, P_4, P_5에서는 조건 (가)에 의하여 두 원소 중
하나만 선택할 수 있습니다.

그런데 조건 (나)를 만족하려면 P_3, P_4, P_5에서는 총
1개 또는 3개의 홀수를 선택해야 합니다.

따라서 모든 원소의 합이 최대가 되는 경우는
P_3, P_4, P_5에서 각각 5, 14, 18을 선택한 경우입니다.

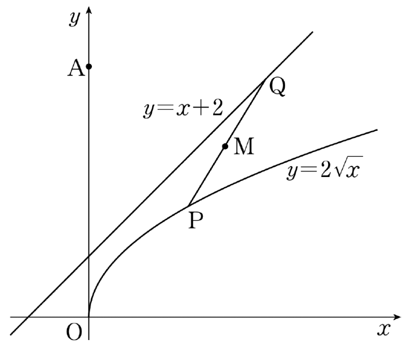
따라서 집합 A의 모든 원소의 합의 최댓값은

$$(1+4+16)+(3+12)+5+14+18 \\ +(11+13+15+17+19) = 148$$

정답: ④

Problem #21

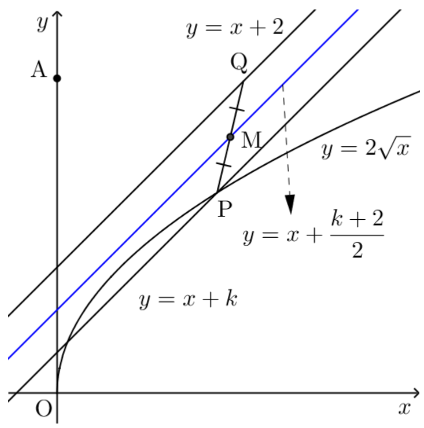
21. 그림과 같이 함수 $y=2\sqrt{x}$ 의 그래프 위를 움직이는 점 P와 직선 $y=x+2$ 위를 움직이는 점 Q에 대하여 선분 PQ의 중점을 M이라 하자. 점 M과 점 A$(0,\ 8)$ 사이의 거리의 최솟값은? [4점]



① $\frac{13\sqrt{2}}{4}$ ② $\frac{27\sqrt{2}}{8}$ ③ $\frac{7\sqrt{2}}{2}$ ④ $\frac{29\sqrt{2}}{8}$ ⑤ $\frac{15\sqrt{2}}{4}$

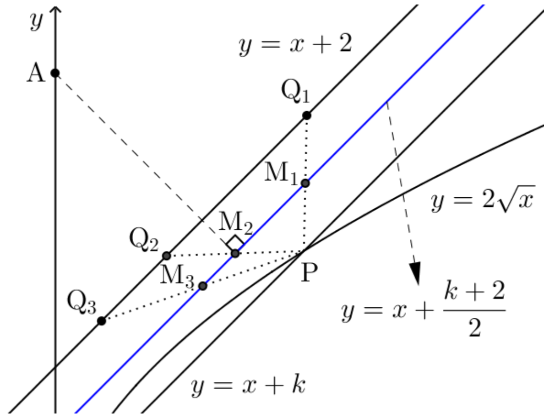
Solution

점 P를 고정하고 점 P가 $y=x+k$ 위에 있다고 하면 아래 그림과 같이 점 M은 직선 $y=x+\frac{k+2}{2}$ 위에 있습니다.



이때 다음과 같이 점 Q를 이동시키면, 점 M이 직선 $y=x+\frac{k+2}{2}$ 위의 임의의 점이 되도록 움직일 수 있습니다.

이때 $\overline{\mathrm{AM}}$의 최솟값은 점 A와 직선 $y=x+\frac{k+2}{2}$ 사이의 거리와 같습니다.



즉, 위 그림에서 점 M이 $\mathrm{M_2}$ 위치에 있을 때 $\overline{\mathrm{AM}}$이 최소가 됩니다.

점 A$(0,\ 8)$과 직선 $y=x+\frac{k+2}{2}$

$(2x-2y+k+2=0)$ 사이의 거리는

$\frac{|k-14|}{\sqrt{2^2+(-2)^2}}=\frac{|k-14|}{2\sqrt{2}}$이므로

$\overline{\mathrm{AM}}$의 최솟값은 $\frac{|k-14|}{2\sqrt{2}}$입니다.

이때 $k<2$이므로 k의 값이 최대일 때, $\frac{|k-14|}{2\sqrt{2}}$의 값이 최소가 됩니다.

점 P는 $y=2\sqrt{x}$와 $y=x+k$의 교점이므로 방정식

$2\sqrt{x}=x+k$

$\Rightarrow 4x=(x+k)^2 \Rightarrow x^2+2(k-2)x+k^2=0$

은 실근을 가져야 합니다.

위 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(k-2)^2-k^2=-4k+4\geq 0$

$\therefore\ k\leq 1$

따라서 $k=1$일 때 $\overline{\mathrm{AM}}$은 최솟값 $\frac{13}{2\sqrt{2}}=\frac{13\sqrt{2}}{4}$를 가집니다.

정답: ①

Problem #26

26. $\log_x(-x^2+4x+5)$가 정의되기 위한 모든 정수 x의 값의 합을 구하시오. [4점]

Solution

주어진 로그가 정의되려면

(1) 밑 조건: $x>0$, $x\neq 1$

(2) 진수 조건: $-x^2+4x+5>0$

$\Rightarrow x^2-4x-5<0$

$\Rightarrow (x+1)(x-5)<0 \Rightarrow -1<x<5$

(1), (2)로부터 주어진 로그가 정의되려면

$0<x<5$이고 $x\neq 1$이어야 합니다.

따라서 모든 정수 x의 값의 합은 $2+3+4=9$

정답: 9

Problem #27

27. 모든 항이 실수인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_3+a_2=1,\ a_6-a_4=18$$

일 때, $\frac{1}{a_1}$의 값을 구하시오. [4점]

Solution

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r이라 하면

$a_3+a_2=a_2(r+1)=1$

$a_6-a_4=a_4(r^2-1)=18$

위 두 등식을 변변 나누면

$\frac{a_4(r^2-1)}{a_2(r+1)}=18 \Rightarrow r^2(r-1)=18$

$\Rightarrow r^3-r^2-18=0 \Rightarrow (r-3)(r^2+2r+6)=0$

등비수열 $\{a_n\}$의 모든 항은 실수이므로

$\therefore\ r=3$

$a_2(r+1)=a_1r(r+1)=1$에서

$\therefore\ \frac{1}{a_1}=r(r+1)=12$

정답: 12

Problem #28

28. 전체집합

$$U=\{x\,|\,x\text{는 } 3\text{의 배수가 아닌 } 30 \text{ 이하의 자연수}\}$$

의 부분집합 A에 대하여 $n(A)=4$이고 집합 A의 모든 원소의 합은 100이다. 집합 A의 모든 원소를 작은 수부터 크기순으로 나열한 것을 x_1, x_2, x_3, x_4라 할 때, $x_4-x_3+x_2-x_1$의 최댓값을 구하시오. [4점]

Solution

$x_1+x_3=X$라 하고, $x_2+x_4=Y$라 하면

두 자연수 X, Y는 $5\leq X<Y\leq 55$ 이고

($\because\ X=x_1+x_3\geq 1+4=5,\ Y=x_2+x_4\leq 26+29=55$)

문제의 조건에 의하여 $X+Y=100$입니다.

이때 $x_4-x_3+x_2-x_1=Y-X$이므로

$X=45$이고 $Y=55$일 때 $Y-X$가 최대가 됩니다.

따라서 $x_4-x_3+x_2-x_1=Y-X$의 최댓값은

$55-45=10$입니다.

(실제로 $x_1=16$, $x_2=23$, $x_3=29$, $x_4=32$는

문제의 조건을 만족하는 경우입니다.)

정답: 10

Problem #29

29. 자연수 m에 대하여 다음 조건을 만족시키는 모든 자연수 k의 값의 합을 $A(m)$이라 하자.

> 3×2^m은 첫째항이 3이고 공비가 2 이상의 자연수인 등비수열의 제k항이다.

예를 들어, 3×2^2은 첫째항이 3이고 공비가 2인 등비수열의 제3항, 첫째항이 3이고 공비가 4인 등비수열의 제2항이 되므로 $A(2)=3+2=5$이다. $A(200)$의 값을 구하시오. [4점]

Solution

등비수열의 정의에 의하여

$3\times 2^m = 3\times r^{k-1}$ (r은 2 이상의 자연수)

$\therefore\ r = 2^{\frac{m}{k-1}}$

이때 r은 2 이상의 자연수이므로

$\dfrac{m}{k-1}$은 1 이상의 자연수입니다.

따라서 $k-1$은 m의 양의 약수입니다.

즉, k는 $\{(m$의 양의 약수$)+1\}$ 꼴입니다.

$200 = 2^3\times 5^2$이므로

200의 양의 약수의 개수는 $(3+1)(2+1) = 12$이고

200의 모든 양의 약수의 합은

$(1+2+2^2+2^3)(1+5+5^2) = 15\times 31 = 465$ 이므로

$\therefore\ A(200) = 465 + 12 = 477$

정답: 477

Problem #30

30. 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시키는 정사각형의 개수를 S_n이라 하자.

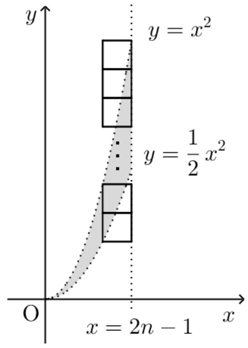
(가) 정사각형은 한 변의 길이가 1이고 꼭짓점의 x좌표와 y좌표가 모두 정수이다.

(나) 연립부등식 $\frac{1}{2}x^2 < y < x^2,\ 0 < x < 2n-1$을 만족시키는 점 (x, y) 중에는 정사각형의 내부에 있는 점이 있다.

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{S_{n+1}-S_n}{n^2}$ 의 값을 구하시오. [4점]

Solution

(나)에서 주어진 연립부등식이 나타내는 영역과 (가), (나)를 만족하는 정사각형들을 그리면 다음과 같습니다.



오른쪽 그림과 같이

직선 $x=2n-1$에 붙어 있는

정사각형들을 생각하면,

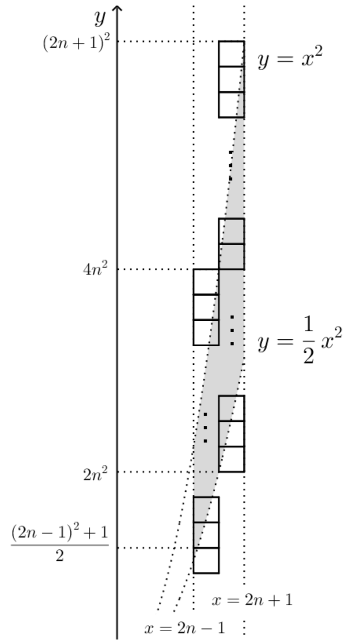
$S_{n+1}-S_n$은 연립부등식

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x^2 < y < x^2 \\ 2n-1 < y < 2n+1 \end{cases}$$

이 나타내는 영역의 점을

적어도 하나 포함하는 정사각형들의 개수와 같음을

알 수 있습니다.



오른쪽 그림과 같이

직선 $x=2n-1$과 변을

공유하는 정사각형의 개수는

$4n^2 - \dfrac{(2n-1)^2+1}{2}+1$

$= 2n^2+2n$ 이고

직선 $x=2n+1$과 변을

공유하는 정사각형의 개수는

$(2n+1)^2-2n^2$

$= 2n^2+4n+1$ 이므로

$\therefore\ S_{n+1}-S_n$

$= (2n^2+2n)+(2n^2+4n+1)$

$= 4n^2+6n+1$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{S_{n+1}-S_n}{n^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{4n^2+6n+1}{n^2} = 4$$

정답: 4