제 2 교시

2015학년도 대학수학능력시험 모의평가 문제지

수학 영역 (B형)

성명		수험 번호						—				

○ 자신이 선택한 유형(A형/B형)의 문제지인지 확인하시오.
○ 문제지의 해당란에 성명과 수험 번호를 정확히 쓰시오.
○ 답안지의 필적확인란에 다음의 문구를 정자로 기재하시오.

뿌리 깊은 나무는 난이도에 흔들리지 않는다.

○ 답안지의 해당란에 성명과 수험 번호를 쓰고, 또 수험 번호, 문형(홀수/짝수), 답을 정확히 표시하시오.
○ 단답형의 답의 숫자에 '0'이 포함되면 그 '0'도 답란에 반드시 표시하시오.
○ 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참조하시오.
○ 배점은 2점, 3점 또는 4점입니다.
○ 계산은 문제지의 여백을 활용하시오.

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.

제 2 교시

수학 영역

1. $\sqrt{6} \div \sqrt[3]{18} \times \sqrt[6]{96}$ 의 값은? [2점]

① 2 ② 3 ③ 4
④ 6 ⑤ 9

2. 두 행렬 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$에 대하여 $AX+BX=2A+B$를 만족시키는 행렬 X의 모든 성분의 합은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

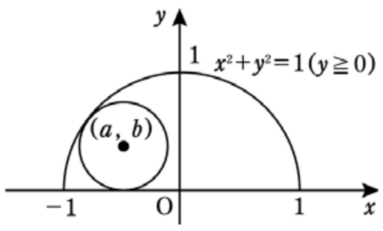
3. $\lim_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}{\sqrt{x}-1}$의 값은? [2점]

① $\dfrac{1}{2}$ ② $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ③ 1
④ $\sqrt{2}$ ⑤ 2

4. 등차수열 $\{a_n\}$이 $a_3+a_4=12$, $\dfrac{a_2+a_4+a_6}{a_1+a_3+a_5}=2$를 만족할 때 a_5의 값은? [3점]

① 3 ② 6 ③ 9
④ 12 ⑤ 15

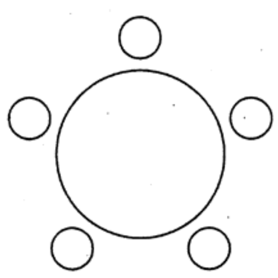
5. 오른쪽 그림과 같이 반원 $x^2+y^2=1\ \ (y \geq 0)$과 x축에 동시에 접하는 원의 중심의 좌표를 $(a,\, b)$라 할 때,



$\displaystyle\lim_{a \to -1+0} \frac{b}{a+1}$ 의 값은? [3점]

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ 1
④ $\frac{3}{2}$ ⑤ 2

6. A, B, C, D, E의 5명이 원탁에 둘러앉을 때, A, B, C 세 사람이 모두 이웃하도록 앉는 방법의 수는? [3점]



① 10 ② 12
③ 15 ④ 16
⑤ 18

7. 삼차방정식 $x^3+5x^2+3x-7=0$의 세 실근을 $\alpha,\, \beta,\, \gamma$라 할 때, 방정식 $\frac{1}{x-\alpha}+\frac{1}{x-\beta}+\frac{1}{x-\gamma}=0$의 모든 근의 합은? [3점]

① -2 ② $-\frac{7}{3}$ ③ $-\frac{8}{3}$
④ -3 ⑤ $-\frac{10}{3}$

8. 삼각형 ABC에서 $\angle \mathrm{A}=60°$이고 $\overline{\mathrm{BC}}=\sqrt{3}$일 때 $\overline{\mathrm{AB}}+\overline{\mathrm{AC}}$의 최댓값은? [3점]

① $\sqrt{6}$ ② $2\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{10}$
④ $2\sqrt{3}$ ⑤ $\sqrt{14}$

[9~10] $y=a$가 $y=4\cdot 2^x$및 $y=2^x$와 만나는 점을 각각 A , B라 하고 $y=b$가 $y=4\cdot 2^x$ 및 $y=2^x$와 만나는 점을 각각 C, D라 하자. (단, $0<a<b$이다.)
10번과 11번의 물음에 답하시오.

9. $b-a=3$일 때 두 곡선과 $y=a$ 및 $y=b$로 둘러싸인 부분의 넓이는? [3점]

① 2 ② 4 ③ 6
④ 8 ⑤ 10

10. ABC가 정삼각형일 때, 점 A의 좌표는 (p, q)이다. 이때, $2^p\times q^3$의 값을 구하시오. [3점]

① $\frac{3}{4}$ ② 1 ③ $\frac{5}{4}$
④ $\frac{7}{4}$ ⑤ $\frac{9}{4}$

11. 자연수 n에 대하여 두 함수 $y=2^x$, $y=\log_2 x$의 그래프가 직선 $y=-\frac{1}{n}x+2$와 만나는 교점의 x좌표를 각각 a_n, b_n이라 하자. 이때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

〈보기〉
ㄱ. $a_1<1$이고 $b_1>1$
ㄴ. $a_n<a_{n+1}<1$
ㄷ. $n\geq 2$일 때 $a_n\cdot 2^{a_n}<b_n\cdot\log_2 b_n$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

12. 집합 $V=\left\{\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x\end{pmatrix} \mid x, y \text{ 는실수}\right\}$에 대하여, <보기>에서 옳은 것을 모두 고르면? [4점]

〈보기〉
ㄱ. 집합 V는 행렬의 곱셈에 대한 항등원을 갖는다.
ㄴ. 행렬 $A\in V$에 대하여 $A\neq O$이면 A는 역행렬을 갖는다.
ㄷ. 행렬 $A, B\in V$에 대하여 $AB=O$이면 $A=O$ 또는 $B=O$이다. (단, O는 영행렬이다.)

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

13. 다음은 $\log_3 4$가 무리수임을 증명한 것이다.

[증명]

$\log_3 4$가 유리수라 가정하면
$\log_3 4 > 0$이므로

$\log_3 4 = \frac{p}{q}$ (단, p, q은 서로소인 자연수)

인 p, q가 존재한다. 주어진 식을 변형하면
$4 = 3^{\boxed{(가)}}$이므로 $4^q = 3^p$이다.
그런데, 4^q은 $\boxed{(나)}$이고 3^p은 $\boxed{(다)}$이므로 모순이다.
따라서 $\log_3 4$는 유리수가 아니다.

위의 증명에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은? [3점]

	(가)	(나)	(다)
①	$\frac{p}{q}$	4의 배수	3의 배수
②	$\frac{q}{p}$	4의 배수	3의 배수
③	$\frac{p}{q}$	짝수	3의 배수
④	$\frac{q}{p}$	짝수	홀수
⑤	$\frac{p}{q}$	짝수	홀수

14. 함수 $f(a)$를

$$f(a) = \lim_{x \to a} \frac{1}{x-a} \int_a^x \{\cos(a+t) + \sqrt{3}\sin(a+t)\}\, dt$$

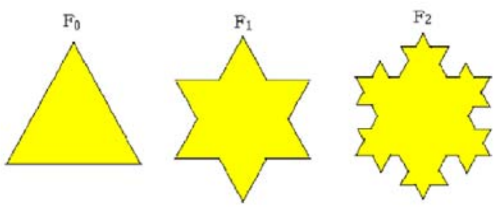
로 정의할 때, $0 \le a < \pi$의 범위에서 $f(a)$는 $a = \frac{\pi}{p}$에서 최댓값 q를 갖는다. pq의 값은? [3점]

① 12 ② 11 ③ 10
④ 9 ⑤ 8

15. 행렬 $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & k \end{pmatrix}$로 나타내어지는 일차변환에 의하여 직선 l : $x+y=1$이 옮겨진 직선을 l'이라 하자. 두 직선 l과 l'이 수직일 때, k의 값은? [3점]

① -4 ② -3 ③ -2
④ -1 ⑤ 0

16. 다음 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정삼각형 F_0가 있다. F_0의 각 변의 삼등분



점을 잡아 $\frac{1}{3}$을 떼어 내고 각 변의 길이의 $\frac{1}{3}$인 선분2개를 붙여 F_1을 만든다. 같은 방법으로 F_1으로부터 F_2를 만들고, F_2로부터 F_3을 만든다.

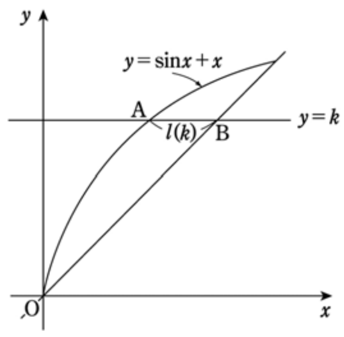
이와 같은 과정을 한없이 되풀이 하여 얻은 도형을 코흐(Koch)곡선이라고 한다. 도형 F_n의 변의 개수를 a_n, 둘레의 길이를 b_n이라 하자. $a_0 = 3$, $b_0 = 3$, $a_1 = 12$, $b_1 = 4$이다. 이때 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{a_n}$의 값을 구하면? [4점]

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ 2
④ 3 ⑤ 4

17. 자연수 n에 대하여 $\log n$의 지표를 $f(n)$, 가수를 $g(n)$ $(0 \le g(n) < 1)$이라 하자. $g(n+1) < g(n)$을 만족하는 n의 값 중 작은 것부터 차례대로 $n_1, n_2, n_3, \cdots$이라 할 때, $\sum_{k=1}^{10} f(n_k)$의 값은? [4점]

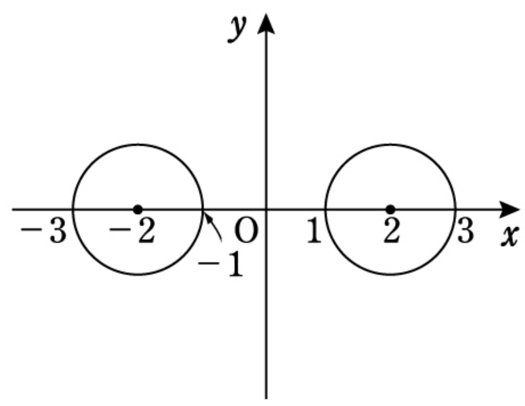
① 35 ② 36 ③ 45
④ 46 ⑤ 55

18. 직선 $y = k$ (단, $0 < k < \pi$)가 곡선 $y = x + \sin x$ 및 직선 $y = x$와 만나는 두 교점을 각각 A, B라 하고 두 점 사이의 거리 $\overline{\mathrm{AB}}$를 $l(k)$라 하자. 함수 $l(k)$의 최댓값을 구하면? [4점]



① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

19. 좌표평면 위에 중심이 각각 $(2, 0)$, $(-2, 0)$이고 반지름의 길이가 1인 두 원이 있다. 양수 r에 대하여 $f(r)$를 반지름의 길이가 r이고 이 두 원에 동시에 접하는 원의 개수라 하자. <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은? [4점]



<보기>

ㄱ. $f(2) = 4$
ㄴ. $\lim_{x \to 1+0} f(f(x)) = 4$
ㄷ. $\sum_{n=1}^{5} f(n) = 26$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

20. $0 \le x \le 1$에서 정의된 다항함수 $f(x)$가 다음 두 조건을 만족한다.

Ⅰ. $1 < f(x) < 2$
Ⅱ. $x_1 < x_2$이면 $f(x_1) < f(x_2)$

이때, <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은? [4점]

〈보기〉

ㄱ. $0 < x < 1$인 임의의 실수 x에 대하여 $f'(x) \ge 0$이다.

ㄴ. 방정식 $f(x) - 2x = 0$의 해가 개구간 $(0, 1)$에 적어도 한 개 존재한다.

ㄷ. $\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n} < \int_0^1 f(x)dx < \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n}$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

21. 자연수 k에 대하여 연립 부등식 $y < x$, $x + y < k$를 만족시키는 자연수의 순서쌍 (x, y)의 개수를 a_k라 할 때, 다음<보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은? [4점]

〈보기〉

ㄱ. $a_6 = 4$

ㄴ. $a_{2n} - a_{2n-1} = n - 1$

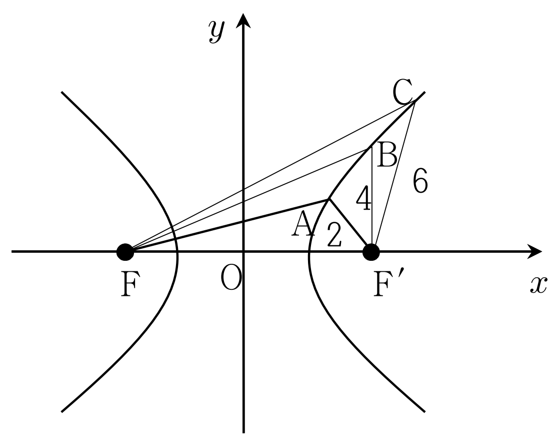
ㄷ. $\sum_{k=1}^{20} a_k = 525$

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

단답형(22 ~ 30)

22. 행렬 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$가 나타내는 일차변환에 의하여 두 점 $(2, 2)$, $(3, 4)$이 각각 두 점 P, Q로 옮겨지고, 원점을 중심으로 $60°$만큼 회전하는 변환에 의하여 두 점 P, Q가 각각 $(-\sqrt{3}, 1)$, $(-1, -\sqrt{3})$으로 옮겨진다고 할 때, 행렬 A의 모든 성분의 합을 구하시오. [3점]

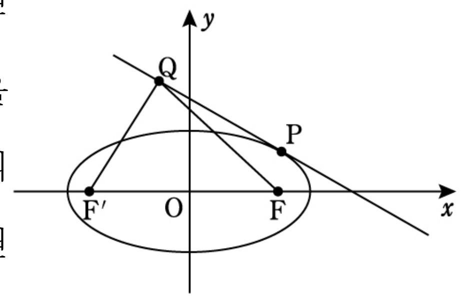
23. 그림과 같이 쌍곡선 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$의 한 초점 F′로부터의 거리가 2, 4, 6이 되는 세 점 A, B, C를 쌍곡선 위에 잡는다. 다른 한 초점 F에 대하여 $\overline{FA} + \overline{FB} + \overline{FC}$의 값을 구하시오. [3점]



24. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{a\cos x-\cos 3x}{x^2} & (x\neq 0) \\ b & (x=0) \end{cases}$ 가 $x=0$에서 연속일 때 $a+b$의 값을 구하시오. [3점]

25. $A_{n+1}=A_n+(2n-1)\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $A_1=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$일 때, A_5의 모든 원소의 합을 구하시오. [3점]

26. 오른쪽 그림에서 타원 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$의 두 초점을 F, F′라 하고, 타원 위의 점 $\mathrm{P}\left(\dfrac{3}{2},\ \sqrt{3}\right)$에서 타원에 그은 접선을 l이라 하자.



l 위의 동점 Q에 대하여 $\overline{\mathrm{QF}}+\overline{\mathrm{QF'}}$가 최소가 될 때의 점 Q의 좌표는 $(a,\ b)$이고, $\overline{\mathrm{QF}}+\overline{\mathrm{QF'}}$의 최솟값은 c이다. 이때, $(abc)^2$의 값을 구하시오. [4점]

27. 아래 그림 [가]과 같이 번호가 쓰인 바닥에 어두운 색으로 겉면이 색칠된 정육면체 모양의 입체도형 10개를 쌓아서 위에서 바라본 모양이 그림 [나]처럼 되도록 쌓는 방법은 모두 몇 가지인지 구하시오. (단, 정육면체의 한 면은 그림의 한 칸과 서로 합동이다.) [4점]

[가]

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10

[나]

		3		
	7	8		

28. 100 이하의 자연수 전체의 집합을 S라 할 때, $n \in S$에 대하여 집합

$$\{k \mid k \in S \text{이고 } \log_2 n - \log_2 k \text{는 정수}\}$$

의 원소의 개수를 $f(n)$이라 하자. 예를 들어, $f(10) = 5$이고 $f(99) = 1$이다. 이때, $f(n) = 2$인 n의 개수를 구하시오. [4점]

29. 실수 t에 대하여 곡선 $y = x^4 - x^3 + 2x$ 위의 점 $(t,\ t^4 - t^3 + 2t)$과 직선 $y = 2x + k$ 사이의 거리를 $g(t)$라 하자. 함수 $g(t)$가 $t = 1$에서만 미분이 불가능할 때, $\sqrt{5}\, g'(3)$의 값을 구하시오. [4점]

30. 다음 규칙에 따라 자연수를 적어 나간다. $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

[규칙 1] 제1행에는 1을 적는다.
[규칙 2] 제$(n+1)$행의 첫 번째 수는 제n행의 마지막 수와 같다.
[규칙 2] 제n행에는 공차가 2인 연속된 2^{n-1}개의 자연수를 적는다.

제1행	1							
제2행	1,	3						
제3행	3,	5,	7,	9				
제4행	9,	11,	13,	15,	17,	19,	21,	23

제m행의 n번째 수를 $a(m,\ n)$으로 나타내기로 하자. 예를 들어 $a(3,\ 3)$는 제3행의 3번째 수이므로 7을 나타낸다. $a(m,\ n) = 777$일 때, $m + n$의 값을 구하시오. [4점]

실전모의고사 (B형) 2회- 정답 및 해설

1	2	3	4	5
①	④	②	④	③
6	7	8	9	10
②	⑤	④	③	⑤
11	12	13	14	15
⑤	⑤	⑤	①	①
16	17	18	19	20
①	③	①	③	⑤
21	22	23	24	25
⑤	1	30	5	74
26	27	28	29	30
243	84	24	81	151

1) **정답** ①

풀이

$\sqrt{6} \div \sqrt[3]{18} \times \sqrt[6]{96}$

$= 2^{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{5}{6}} \cdot 3^{\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{1}{6}}$

$= 2^1 \cdot 3^0$

$= 2$

2) **정답** ④

풀이

$AX+BX=2A+B$에서

$(A+B)X=2A+B$

$A+B=\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}$이고 $A+B$의 역행렬이 존재하므로

$X=(A+B)^{-1}(2A+B)$

한편, $2A+B=\begin{pmatrix}2&2\\1&3\end{pmatrix}$이므로

$X=\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}2&2\\1&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-1\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&2\\1&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&1\\-1&1\end{pmatrix}$

따라서 행렬 X의 모든 성분의 합은 4이다.

3) **정답** ②

풀이

$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}{\sqrt{x}-1}$

$=\lim_{x\to1}\frac{(\sqrt{x+1}-\sqrt{2})(\sqrt{x+1}+\sqrt{2})(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x+1}+2)}$

$=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(\sqrt{x+1}+\sqrt{2})}$

$=\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{2}}=\frac{2}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

4) **정답** ④

풀이

$a_n=a+(n-1)d$ (단, a는 첫째항, d는 공차)라고 하면

$a_3+a_4=12$에서 $a+2d+a+3d=12$

$\therefore\ 2a+5d=12$

$\frac{a_2+a_4+a_6}{a_1+a_3+a_5}=2$에서 $\frac{3a_4}{3a_3}=2$이므로

$\frac{a+3d}{a+2d}=2$

$a+3d=2a+4d$

$\therefore\ a+d=0$

$\therefore\ a=-4,\ d=4$

$a_5=a+4d=12$

5) **정답** ③

풀이

중심이 $(a,\ b)$인 원이 $x^2+y^2=1$인 원에 내접하므로

$1-b=\sqrt{a^2+b^2}$

$b=\frac{-a^2+1}{2}$

$\therefore\ \lim_{a\to-1+0}\frac{b}{a+1}=\lim_{a\to-1+0}\frac{-(a^2-1)}{2(a+1)}$

$=\lim_{a\to-1+0}\frac{-(a-1)}{2}=1$

6) **정답** ②

풀이

$2\times3\times2\times1=12$(가지)

7) **정답** ⑤

풀이

원식 양변에 $(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$를 곱하여 정리하면

$3x^2-2(\alpha+\beta+\gamma)x+\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=0$이다.

삼차방정식 $x^3+5x^2+3x-7=0$에서 $\alpha+\beta+\gamma=-5$,

$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=3$이므로

$3x^2+10x+3=0$에서 $x=-3,\ -\frac{1}{3}$이고 이 값들은 위 삼차방정식의 근이 아니므로 무연근이 아니다.

$\therefore$ 세 근의 합 $=\frac{2(\alpha+\beta+\gamma)}{3}=-\frac{10}{3}$

8) **정답** ④

풀이

$\triangle$ABC에서 외접원의 반지름을 R이라 하면 사인법칙에서

$\frac{\sqrt{3}}{\sin 60^\circ}=\frac{\overline{\mathrm{AC}}}{\sin\mathrm{B}}=\frac{\overline{\mathrm{AB}}}{\sin\mathrm{C}}=2R$

$\therefore\ R=1$이고,

$\overline{\mathrm{AC}}=2\sin\mathrm{B},\ \overline{\mathrm{AB}}=2\sin\mathrm{C}=2\sin(120^\circ-\mathrm{B})$

$\therefore \overline{\mathrm{AB}} + \overline{\mathrm{AC}} = 2\sin\mathrm{B} + 2\sin(120^\circ - \mathrm{B})$

$= 2\sin\mathrm{B} + 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\mathrm{B} + \frac{1}{2}\sin\mathrm{B}\right)$

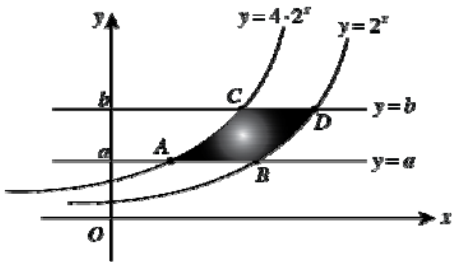
$= 3\sin\mathrm{B} + \sqrt{3}\cos\mathrm{B}$

$= 2\sqrt{3}\sin\left(\mathrm{B} + \frac{\pi}{6}\right)$

따라서 최댓값은 $2\sqrt{3}$ 이다.

9) **정답** ③

풀이



$y = 2^{x_1}$에서 $x_1 = \log_2 y$

$y = 2^{x_2+4}$에서 $x_2 = \log_2 y - 2$이므로

구하는 넓이 S는

$S = \int_a^b (x_1 - x_2)dy$

$= 2(b-a)$

$= 6$

10) **정답** ⑤

풀이

점 A의 좌표를 $(p,\ q)$라 하면

삼각형 ABC가 정삼각형이고 선분 AB의 길이가 2이므로

$B(p+2,\ q)$, $C(p+1,\ q+\sqrt{3})$이다.

점 A, C는 곡선 $y = 2^{x+2}$ 위의 점이므로

$q = 2^{p+2} \cdots$①

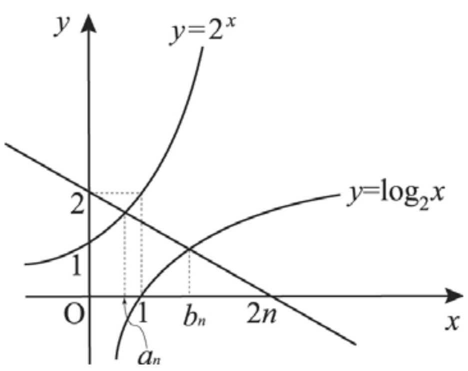
$q + \sqrt{3} = 2^{p+3} \cdots$②

①과 ②를 연립하면 $q = \sqrt{3}$, $2^p = \frac{\sqrt{3}}{4}$

$\therefore\ 2^p \times q^3 = \frac{9}{4}$

11) **정답** ⑤

풀이



ㄱ. 그래프에서 $0 < a_n < 1 < b_n$이다. (참)

ㄴ. 그래프에서 n의 값이 커질수록 x절편이 커지므로 a_n도 커진다. (참)

ㄷ. $0 < a_n < 1$이므로 $1 < 2^{a_n} < 2$ $\therefore 0 < a_n \cdot 2^{a_n} < 2$

$b_n \geq 2$이므로 $\log_2 b_n \geq 1$

$\therefore b_n \cdot \log_2 b_n \geq 2$

$\therefore a_n \cdot 2^{a_n} < b_n \cdot \log_2 b_n$ (참)

12) **정답** ⑤

풀이

$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} p & -q \\ q & p \end{pmatrix}$

(단, a, b, p, q는 실수)라 하면

ㄱ. $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in V$이므로 곱셈에 대한 항등원을 갖는다. (참)

ㄴ. $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$에서 $\mathrm{A} \neq \mathrm{O}$이면

$a \neq 0$ 또는 $b \neq 0$이므로

$D = a^2 + b^2 \neq 0$

따라서 A는 역행렬을 갖는다. (참)

ㄷ. $\mathrm{AB} = \mathrm{O}$에서 AB가 역행렬을 갖지 않으므로 A 또는 B가 역행렬을 갖지 않는다.

$\Rightarrow a^2 + b^2 = 0$ 또는 $p^2 + q^2 = 0$

$\Rightarrow a = b = 0$ 또는 $p = q = 0$

$\therefore \mathrm{A} = \mathrm{O}$ 또는 $\mathrm{B} = \mathrm{O}$ (참)

13) **정답** ⑤

풀이

$\log_3 4 = \frac{p}{q}$에서 $4 = 3^{\frac{p}{q}}$

$\therefore$ (가) $= \frac{p}{q}$

$3^p = 4^q$이고 4^q은 $\boxed{\text{짝수}}$이고, 3^p은 $\boxed{\text{홀수}}$가 되어 모순이다.

$\therefore$ (가) $= \frac{p}{q}$, (나) = 짝수, (다) = 홀수

14) **정답** ①

풀이

$g(t) = \cos(a+t) + \sqrt{3}\sin(a+t)$, $g(t) = G'(t)$라 하면

$f(a) = \lim_{x\to a}\frac{1}{x-a}\int_a^x \{\cos(a+t) + \sqrt{3}\sin(a+t)\}\,dt$

$= \lim_{x\to a}\frac{1}{x-a}\int_a^x g(t)dt$

$= \lim_{x \to a} \frac{G(x) - G(a)}{x - a}$
$= G'(a) = g(a)$
$= \cos 2a + \sqrt{3} \sin 2a$
$= 2\left(\cos 2a \cdot \frac{1}{2} + \sin 2a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
$= 2\cos\left(2a - \frac{\pi}{3}\right)$

따라서 $f(a)$는 $2a - \frac{\pi}{3} = 0$, 즉 $a = \frac{\pi}{6}$일 때, 최댓값 2를 갖는다.
$\therefore\ p = 6,\ q = 2$

15) **정답** ①
풀이
직선 l 위의 점 $P(x, y)$가 옮겨진 점을 $P'(x', y')$이라 하면
$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
$\therefore \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & k \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{1}{3k+2} \begin{pmatrix} k & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$
$\therefore \begin{cases} x = \frac{1}{3k+2}(kx' + 2y') \\ y = \frac{1}{3k+2}(-x' + 3y') \end{cases}$
직선 l의 방정식에 대입하여 정리하면
$l' : (k-1)x' + 5y' = 3k+2$
이 직선이 $x + y = 1$과 수직이므로 $\frac{1-k}{5} = 1$
$1 - k = 5 \quad \therefore k = -4$

16) **정답** ①
풀이
F_n의 한 변의 길이는 $\left(\frac{1}{3}\right)^n$이므로
$b_n = a_n \times \left(\frac{1}{3}\right)^n$
$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{a_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$

17) **정답** ③
풀이
$\log(n+1) - \log n = \log \frac{n+1}{n} \neq$(정수)이고
$0 < \log(n+1) - \log n < 1$이므로
$g(n+1) < g(n)$이 성립하기 위해서는
$\log(n+1) =$(정수)일 때이고, 이때 $g(n+1) = 0$
즉, $n + 1 = 10^l$ (l은 자연수) 꼴이어야 한다.
$\therefore n = 10 - 1,\ 10^2 - 1,\ 10^3 - 1, \cdots$
즉, $n_k = 10^k - 1$
이때 $f(n_k)$는 $\log(10^k - 1)$의 지표이므로
$f(n_k) = k - 1$
$\therefore \sum_{k=1}^{10} f(n_k) = \sum_{k=1}^{10} (k-1) = 45$

18) **정답** ①
풀이
곡선 $y = x + \sin x$의 점 A에서 접선이 $y = x$와 평행할 때 AB가 최대가 되므로
$\left[\frac{dy}{dx}\right]_{(x=\alpha)} = 1 + \cos\alpha = 1 \quad \therefore\ \alpha = \frac{\pi}{2}$
따라서 $A\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + 1\right)$, $B\left(\frac{\pi}{2} + 1, \frac{\pi}{2} + 1\right)$일 때
$l\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

19) **정답** ③
풀이
ㄱ. 반지름이 2인 원 중에서 두 원에 동시에 외접하는 원은 2개다.
한편 한 원과 외접하고 다른 원과 내접하는 원이 각각 1개씩 2개다. (참)
ㄴ. $1 < r < 2$이면 두 원에 동시에 외접하는 원 2개만 존재한다. 따라서 $f(r) = 2$이다.
$\therefore \lim_{x \to 1+0} f(f(x)) = f(2) = 4$ (참)
ㄷ. $f(1) = 1,\ f(2) = 4,\ f(3) = 7,\ f(4) = 8,\ f(5) = 8$이므로 $\sum_{n=1}^{5} f(n) = 28$ (거짓)

20) **정답** ⑤
풀이
ㄱ. 조건II에서 함수 $f(x)$가 증가함수이므로 ㄱ이 성립한다. (참)
ㄴ. $g(x) = f(x) - 2x$라 하면 $g(x)$는 연속함수
$g(0) = f(0) > 0$
$g(1) = f(1) - 2 < 0$이므로 중간값의 정리에 의해 해가 적어도 한 개 존재한다. (참)
ㄷ. 조건II에서 함수 $f(x)$가 증가함수이므로 ㄷ이 성립한다. (참)

21) **정답** ⑤
풀이

ㄱ. $k=6$일 때

$y<x,\ x+y<6$을 만족하는 자연수의 순서쌍

$(x,y)=(2,1),\ (3,1),\ (3,2),\ (4,1)$이므로 4개다. (참)

ㄴ. $a_{2n}-a_{2n-1}$은 직선 $x+y=2n-1$ 위의 y좌표가 x좌표보다 작은 자연수의 순서쌍의 수이므로

$(x,y)=(2n-2,1),\ (2n-3,2),\ (n,n-1)$이므로 $n-1$개다.

$a_{2n}-a_{2n-1}=n-1$ (참)

ㄷ. $a_{2n+1}-a_{2n}$도 마찬가지로 직선 $x+y=2n$ 위의 y좌표가 x좌표보다 작은 자연수의 순서쌍의 수이므로

$(x,y)=(2n-1,1),\ (2n-2,2),\ (n+1,n-1)$이므로

$n-1$개다.

$a_{2n+1}-a_{2n}=n-1$

ㄴ.에서 구한 $a_{2n}-a_{2n-1}=n-1$과 $a_{2n+1}-a_{2n}=n-1$을 이용하면 $a_{2n+1}-a_{2n-1}=2n-2$이므로

$a_{2n-1}=n^2-3n+2,\ a_{2n}=n^2-2n+1$

$$\sum_{k=1}^{20}a_k=\sum_{k=1}^{10}(a_{2k-1}+a_{2k})$$
$$=\sum_{k=1}^{10}(2k^2-5k+3)=525\ \text{(참)}$$

22) **정답** 1

풀이

점$(-\sqrt{3},\ 1),\ (-1,\ -\sqrt{3})$을 원점을 중심으로 $-60°$만큼 회전이동하면 점 $P,\ Q$가 된다.

$$\begin{pmatrix}\cos(-60°) & -\sin(-60°)\\ \sin(-60°) & \cos(-60°)\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & \sqrt{3}\\ -\sqrt{3} & 1\end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & \sqrt{3}\\ -\sqrt{3} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\sqrt{3} & -1\\ 1 & -\sqrt{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -2\\ 2 & 0\end{pmatrix}\text{이다.}$$

$$\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 3\\ 2 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -2\\ 2 & 0\end{pmatrix}\text{에서}$$

$a=2,\ b=-2,\ c=4,\ d=-3$

따라서 행렬 A 의 모든 성분의 합은 1이다.

23) **정답** 30

풀이

쌍곡선의 정의에 의해

$\overline{AF}-\overline{AF'}=6,\ \overline{BF}-\overline{BF'}=6\ ,\ \overline{CF}-\overline{CF'}=6$이다.

$\overline{AF}=\overline{AF'}+6=8\ ,\ \overline{BF}=\overline{BF'}+6=10\ ,$

$\overline{CF}=\overline{CF'}+6=12$

$\therefore \overline{AF}+\overline{BF}+\overline{CF}=30$

24) **정답** 5

풀이

$$f(0)=\lim_{x\to0}\frac{a\cos x-\cos 3x}{x^2}=b\text{에서}$$

$\lim_{x\to0}x^2=0$ 이므로 $\lim_{x\to0}(a\cos x-\cos3x)=a-1=0$에서 $a=1$

$$\text{따라서 } b=\lim_{x\to0}\frac{\cos x-\cos3x}{x^2}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{2\sin2x\ \sin x}{x^2}$$
$$=\lim_{x\to0}\left(2\cdot\frac{\sin2x}{x}\cdot\frac{\sin x}{x}\right)$$
$$=4$$

$\therefore\ a+b=5$

25) **정답** 74

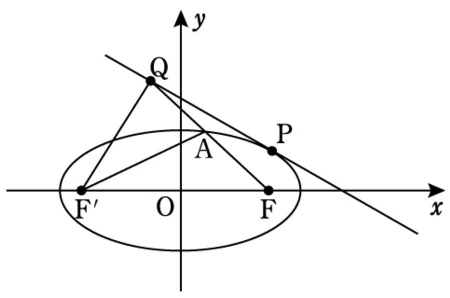
풀이

$$A_5=A_1+(1+3+5+7)\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}+16\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

따라서 A_5의 모든 원소들의 합은 $10+16\times4=74$

26) **정답** 243

풀이



$\overline{QF}$와 타원의 교점을 A라 하면

$\overline{QF}+\overline{QF'}=(\overline{QA}+\overline{AF})+\overline{QF'}$

$=(\overline{QA}+\overline{QF'})+\overline{AF}\geq\overline{AF'}+\overline{AF}$

$=\overline{PF'}+\overline{PF}=6$

따라서 점 Q가 $P\left(\frac{3}{2},\ \sqrt{3}\right)$와 일치할 때 최솟값 6을 가진다.

$$\therefore\ (abc)^2=\frac{9}{4}\times3\times6^2=243$$

27) **정답** 84

풀이

위에서 본 모양이 그림(나)처럼 되려면 (가)에서 숫자 1, 2, 4, 5, 6, 9, 10이 쓰인 자리에 적어도 한 개씩 10개의 정육면체를 쌓으면 되므로 구하는 가짓수는 ${}_7H_3={}_9C_3=84$이다.

28) **정답** 24

풀이

$f(n)=2$를 만족하는 n은
 $25<n\le 50$을 만족하는 홀수 12(개)와
 $50<n\le 100$에 있는 2의 배수 중 4의 배수는 아닌 수의 개수 12개이다.

29) **정답** 81
풀이
$g(t)=\frac{1}{\sqrt{5}}|t^4-t^3-k|$이므로 $t=1$에서 미분불가능 하려면
$g(1)=0$에서 $k=0$
$t>0$일 때, $t^4-t^3>0$이므로 $g(t)=\frac{1}{\sqrt{5}}(t^4-t^3)$에서
$\sqrt{5}\,g'(3)=81$

30) **정답** 151
풀이
제n행의 마지막 수를 나열한 수열을 $\{a_n\}$이라 하면
제n행에 있는 수의 개수는 2^{n-1}이므로
$a_{n+1}=a_n+2(2^n-1)$
따라서 수열 $\{a_n\}$의 계차수열의 일반항은 $2(2^n-1)$이다.

$$\begin{aligned}\therefore a_n&=1+\sum_{k=1}^{n-1}2(2^k-1)\\&=1+2\times\left\{\frac{2(2^{n-1}-1)}{2-1}-(n-1)\right\}\\&=2^{n+1}-2n-1\end{aligned}$$

이때, $a_8=2^9-17=495$, $a_{10}=2^{10}-19=1005$이므로
777는 제9행의 수이다.
$777=495+2\times 141$이므로 777은 9행 142째 수이다.