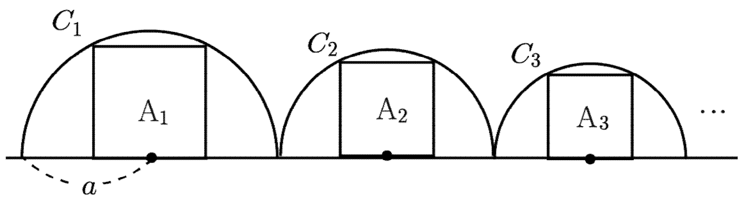
프로젝트 03 무등비도형 다 모아봄2

[출처] 2005 모의_공공 교육청 고3 04월 공통범위 11

[출처] 2005 모의_공공 교육청 고3 04월 11

1. 그림과 같이 반지름의 길이가 a인 반원 C_1에 내접하는 정사각형을 A_1이라 하자. A_1의 한 변의 길이를 반지름으로 하는 반원 C_2에 내접하는 정사각형을 A_2라 하자. A_2의 한 변의 길이를 반지름으로 하는 반원 C_3에 내접하는 정사각형을 A_3라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 정사각형을 만들어 나갈 때, 이들 정사각형의 넓이의 합은?

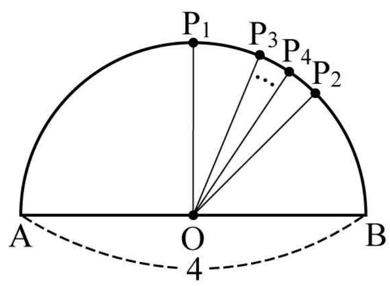


① a^2　② $2a^2$　③ $3a^2$

④ $4a^2$　⑤ $5a^2$

[출처] 2005 모의_공공 교육청 고2 09월 18

2. 그림과 같이 길이가 4인 선분 AB가 지름이고 점 O가 중심인 반원이 있다. 호 $\widehat{\mathrm{AB}}$의 이등분점을 $\mathrm{P_1}$, 호 $\widehat{\mathrm{BP_1}}$의 이등분점을 $\mathrm{P_2}$, 호 $\widehat{\mathrm{P_1P_2}}$의 이등분점을 $\mathrm{P_3}$이라 하자. 이와 같은 방법으로 계속하여 호 $\widehat{\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}}$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$의 이등분점을 P_{n+2}라 하자. 부채꼴 AOP_n의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? (단, 부채꼴에서 중심각의 이등분선이 호와 만나는 점을 호의 이등분점이라 한다.)

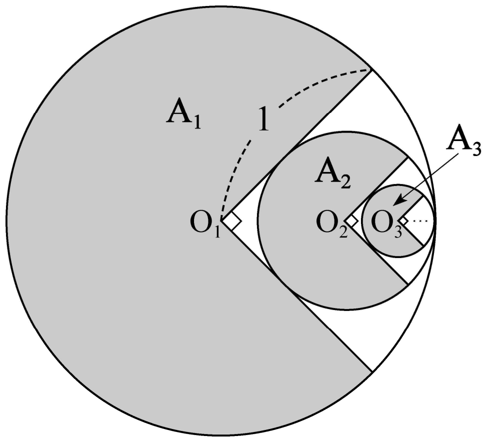


① $\frac{6\pi}{5}$　② $\frac{4\pi}{3}$　③ $\frac{7\pi}{5}$

④ $\frac{8\pi}{5}$　⑤ $\frac{5\pi}{3}$

[출처] 2006 모의_공공 교육청 고2 09월 20

3. 아래 그림과 같이 반지름의 길이가 1인 원 O_1에서 서로 수직인 두 반지름을 그어 중심각의 크기가 각각 270°, 90°인 부채꼴 A_1, B_1을 만든 후, 부채꼴 B_1에 내접하는 원 O_2를 그린다. 다시 원 O_2에서 서로 수직인 두 반지름을 그어 중심각의 크기가 각각 270°, 90°인 부채꼴 A_2, B_2를 만든 후, 부채꼴 B_2에 내접하는 원 O_3을 그린다. 이와 같은 과정을 한없이 계속하여 얻어진 부채꼴 A_1, A_2, A_3, $\cdots$의 넓이를 각각 S_1, S_2, S_3, $\cdots$이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값은?

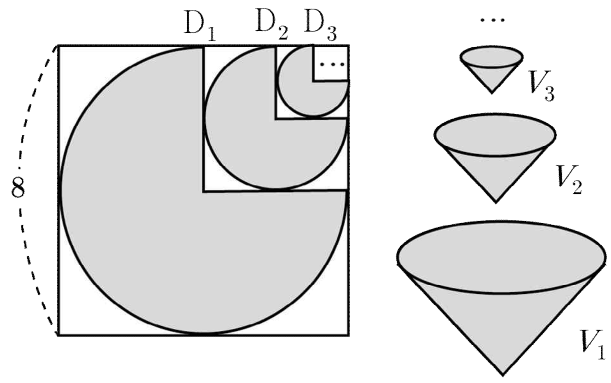


① $\frac{(3\sqrt{2}+2)\pi}{8}$ ② $\frac{(3\sqrt{2}+3)\pi}{8}$ ③ $\frac{(3\sqrt{2}-1)\pi}{4}$

④ $\frac{(\sqrt{3}+2)\pi}{4}$ ⑤ $\frac{(3\sqrt{3}+2)\pi}{8}$

[출처] 2007 모의_공공 교육청 고2 11월 17

4. 한 변의 길이가 8인 정사각형 D_1이 있다. 그림과 같이 정사각형 D_1의 네 변에 접하며 중심각의 크기가 $\frac{3}{2}\pi$인 부채꼴로 만든 원뿔의 부피를 V_1, 남은 정사각형 D_2의 네 변에 접하며 중심각의 크기가 $\frac{3}{2}\pi$인 부채꼴로 만든 원뿔의 부피를 V_2, 남은 정사각형 D_3의 네 변에 접하며 중심각의 크기가 $\frac{3}{2}\pi$인 부채꼴로 만든 원뿔의 부피를 V_3라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 만들어진 원뿔의 부피를 V_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} V_n$의 값은?
(단, 부채꼴로 원뿔을 만들 때, 겹쳐지는 부분은 없도록 한다.)



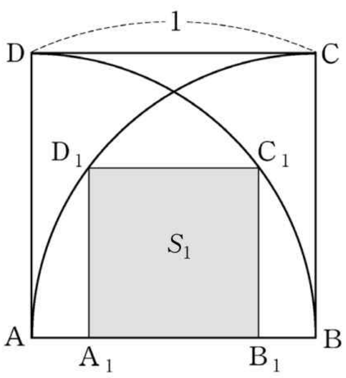
① $\frac{16\sqrt{7}}{7}\pi$ ② $\frac{20\sqrt{7}}{7}\pi$ ③ $\frac{24\sqrt{7}}{7}\pi$

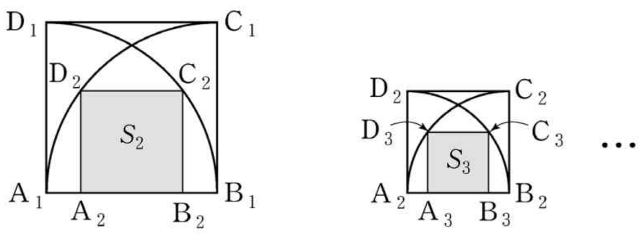
④ $\frac{32\sqrt{7}}{7}\pi$ ⑤ $\frac{36\sqrt{7}}{7}\pi$

[출처] 2008 모의_공공 평가원 고3 09월 공통범위 17

[출처] 2008 모의_공공 평가원 고3 09월 17

5. 한 변의 길이가 1인 정사각형 ABCD가 있다. 그림과 같이 정사각형 ABCD 안에 두 점 A, B를 각각 중심으로 하고 변 AB를 반지름으로 하는 2개의 사분원을 그린다. 이 두 사분원의 공통부분에 내접하는 정사각형을 $A_1B_1C_1D_1$이라 하자. 정사각형 $A_1B_1C_1D_1$ 안에 두 점 A_1, B_1을 각각 중심으로 하고 변 A_1B_1을 반지름으로 하는 2개의 사분원을 그린다. 이 두 사분원의 공통부분에 내접하는 정사각형을 $A_2B_2C_2D_2$라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 정사각형 $A_nB_nC_nD_n$의 넓이를 S_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값은?





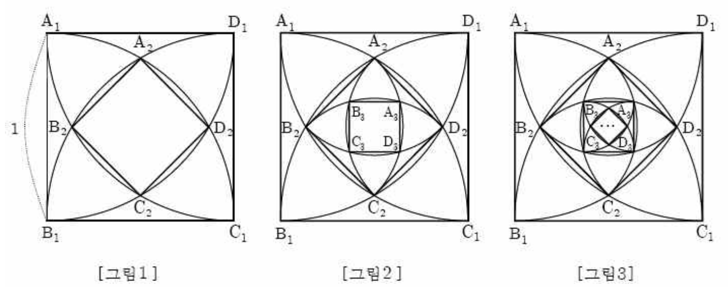
① $\frac{3}{8}$ ② $\frac{9}{16}$ ③ $\frac{4}{5}$

④ $\frac{9}{8}$ ⑤ $\frac{23}{16}$

[출처] 2009 모의_공공 사관학교 고3 07월 19

[출처] 2009 모의_공공 사관학교 고3 07월 19

6. [그림1]과 같이 한 변의 길이가 1인 정사각형 $A_1B_1C_1D_1$의 네 꼭짓점에서 반지름의 길이가 $\overline{A_1B_1}$인 사분원을 그리고, 정사각형 $A_1B_1C_1D_1$의 내부에서 각 사분원끼리 만나는 점을 각각 A_2, B_2, C_2, D_2라 하자. 또 [그림2]와 같이 정사각형 $A_2B_2C_2D_2$의 네 꼭짓점에서 반지름의 길이가 $\overline{A_2B_2}$인 사분원을 그리고, 정사각형 $A_2B_2C_2D_2$의 내부에서 각 사분원끼리 만나는 점을 각각 A_3, B_3, C_3, D_3이라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 모든 자연수 n에 대하여 정사각형 $A_nB_nC_nD_n$의 네 꼭짓점에서 반지름의 길이가 $\overline{A_nB_n}$인 사분원을 그리고, 정사각형 $A_nB_nC_nD_n$의 내부에서 각 사분원끼리 만나는 점을 각각 A_{n+1}, B_{n+1}, C_{n+1}, D_{n+1}이라 하자. 모든 자연수 n에 대하여 정사각형 $A_nB_nC_nD_n$의 넓이를 S_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값은?



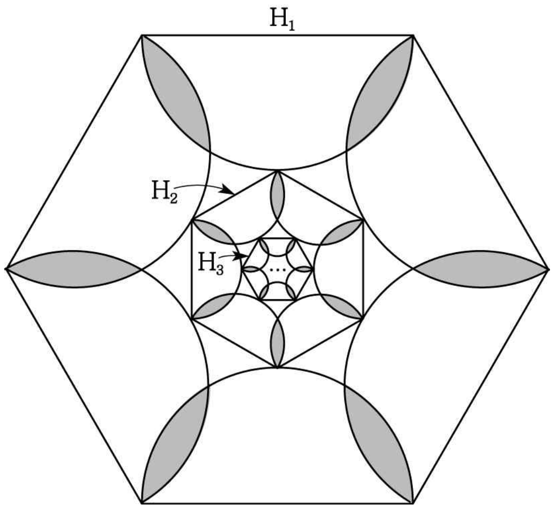
① $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ ② $\frac{2+\sqrt{3}}{2}$ ③ $\frac{2+\sqrt{3}}{3}$

④ $\frac{2+2\sqrt{3}}{3}$ ⑤ $\frac{1+3\sqrt{3}}{3}$

[출처] 2009 모의_공공 교육청 고3 10월 공통범위 16

[출처] 2009 모의_공공 교육청 고3 10월 16

7. 그림과 같이 정육각형 H_1 의 각 변을 지름으로 하는 반원을 정육각형 H_1 의 내부에 그리고, 반원이 겹쳐지는 어두운 부분의 넓이의 합을 S_1, 각 반원의 호의 길이를 이등분하는 점을 꼭짓점으로 하는 정육각형을 H_2 라 하자. 정육각형 H_2 의 각 변을 지름으로 하는 반원을 정육각형 H_2 의 내부에 그리고, 반원이 겹쳐지는 어두운 부분의 넓이의 합을 S_2, 각 반원의 호의 길이를 이등분하는 점을 꼭짓점으로 하는 정육각형을 H_3 이라 하자. 이와 같은 방법으로 정육각형 H_n 의 각 변을 지름으로 하는 반원을 정육각형 H_n 의 내부에 그리고, 반원이 겹쳐지는 어두운 부분의 넓이의 합을 S_n, 각 반원의 호의 길이를 이등분하는 점을 꼭짓점으로 하는 정육각형을 H_{n+1} 이라 하자. 이때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$ 의 값을 S_1 을 이용하여 나타낸 것은?

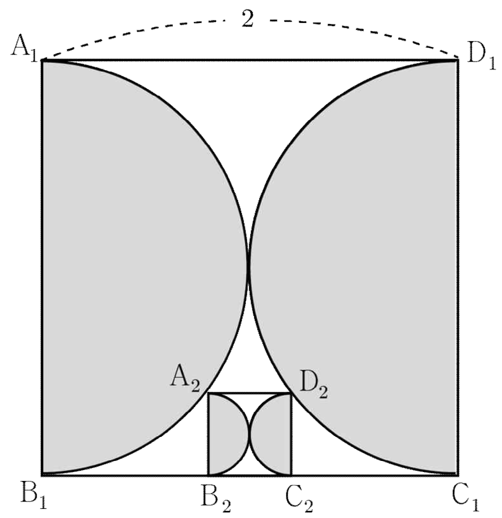


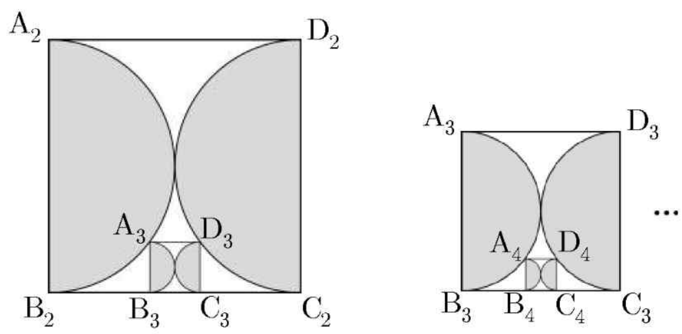
① $\frac{2\sqrt{3}}{3}S_1$ ② $\frac{3-\sqrt{3}}{3}S_1$ ③ $\frac{4\sqrt{3}}{3}S_1$

④ $\frac{3+\sqrt{3}}{3}S_1$ ⑤ $2\sqrt{3}S_1$

[출처] 2009 모의_공공 교육청 고2 09월 19

8. 그림과 같이 한 변의 길이가 2 인 정사각형 $A_1B_1C_1D_1$ 의 내부에 변 A_1B_1, C_1D_1 을 지름으로 하는 두 반원을 그리고, 이 두 반원의 넓이의 합을 S_1 이라 하자. 이 두 반원과 변 B_1C_1 으로 둘러싸인 부분에 내접하는 정사각형 $A_2B_2C_2D_2$ 의 내부에 변 A_2B_2, C_2D_2 를 지름으로 하는 두 반원을 그리고, 이 두 반원의 넓이의 합을 S_2 라 하자. 이 두 반원과 변 B_2C_2 로 둘러싸인 부분에 내접하는 정사각형 $A_3B_3C_3D_3$ 의 내부에 변 A_3B_3, C_3D_3 를 지름으로 하는 두 반원을 그리고, 이 두 반원의 넓이의 합을 S_3 라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n 번째 얻은 두 반원의 넓이의 합을 S_n 이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$ 의 값은?





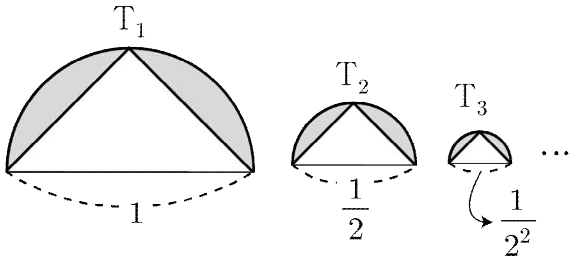
① $\frac{16}{15}\pi$ ② $\frac{25}{24}\pi$ ③ $\frac{36}{35}\pi$

④ $\frac{45}{44}\pi$ ⑤ $\frac{49}{48}\pi$

[출처] 2009 모의_공공 교육청 고2 11월 20

9. 그림과 같이 지름의 길이가 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2^2}$, $\cdots$ 인

등비수열을 이루는 반원의 내부에 지름을 빗변으로 하는 직각이등변삼각형을 그리고, 반원의 내부와 직각이등변삼각형의 외부의 공통부분(색칠한 부분)을 차례로 T_1, T_2, T_3, $\cdots$ 이라 하자.



T_n 의 넓이를 $S_n (n=1, 2, 3, \cdots)$이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} 3^{n-1} \cdot S_n$ 의 값은?

① $\frac{\pi-3}{2}$ ② $\frac{\pi-2}{2}$ ③ $\frac{\pi-1}{2}$

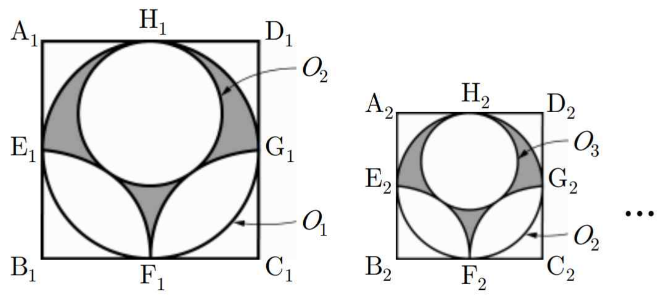
④ $\frac{\pi}{2}$ ⑤ π

[출처] 2011 모의_공공 교육청 고3 04월 18

[출처] 2011 모의_공공 교육청 고3 04월 18

10. 그림과 같이 반지름의 길이가 1인 원 O_1에 외접하는 정사각형 $\mathrm{A_1B_1C_1D_1}$의 네 변 $\mathrm{A_1B_1}$, $\mathrm{B_1C_1}$, $\mathrm{C_1D_1}$, $\mathrm{D_1A_1}$의 중점을 각각 $\mathrm{E_1}$, $\mathrm{F_1}$, $\mathrm{G_1}$, $\mathrm{H_1}$이라 하자. 점 $\mathrm{B_1}$을 중심으로 하고 선분 $\mathrm{B_1F_1}$을 반지름으로 하는 부채꼴 $\mathrm{B_1F_1E_1}$의 호 $\mathrm{E_1F_1}$과 점 $\mathrm{C_1}$을 중심으로 하고 선분 $\mathrm{C_1F_1}$을 반지름으로 하는 부채꼴 $\mathrm{C_1F_1G_1}$의 호 $\mathrm{G_1F_1}$과 원 O_1의 호 $\mathrm{E_1H_1G_1}$로 둘러싸인 도형을 R_1이라 하자. R_1에 내접하는 원을 O_2라 하고 도형 R_1의 넓이에서 원 O_2의 넓이를 뺀 값을 S_1이라 하자. 원 O_2에 외접하는 정사각형 $\mathrm{A_2B_2C_2D_2}$의 네 변 $\mathrm{A_2B_2}$, $\mathrm{B_2C_2}$, $\mathrm{C_2D_2}$, $\mathrm{D_2A_2}$의 중점을 각각 $\mathrm{E_2}$, $\mathrm{F_2}$, $\mathrm{G_2}$, $\mathrm{H_2}$라 하자. 점 $\mathrm{B_2}$를 중심으로 하고 선분 $\mathrm{B_2F_2}$를 반지름으로 하는 부채꼴 $\mathrm{B_2F_2E_2}$의 호 $\mathrm{E_2F_2}$와 점 $\mathrm{C_2}$를 중심으로 하고 선분 $\mathrm{C_2F_2}$를 반지름으로 하는 부채꼴 $\mathrm{C_2F_2G_2}$의 호 $\mathrm{G_2F_2}$와 원 O_2의 호 $\mathrm{E_2H_2G_2}$로 둘러싸인 도형을 R_2라 하자. R_2에 내접하는 원을 O_3이라 하고 도형 R_2의 넓이에서 원 O_3의 넓이를 뺀 값을 S_2라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 호 $\mathrm{E}_n\mathrm{F}_n$, 호 $\mathrm{G}_n\mathrm{F}_n$, 호 $\mathrm{E}_n\mathrm{H}_n\mathrm{G}_n$으로 둘러싸인 도형을 R_n이라 하고 R_n에 내접하는 원을 O_{n+1}이라 하자. 도형 R_n의 넓이에서 원 O_{n+1}의 넓이를 뺀 값을 S_n이라 할 때,

$\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값은?

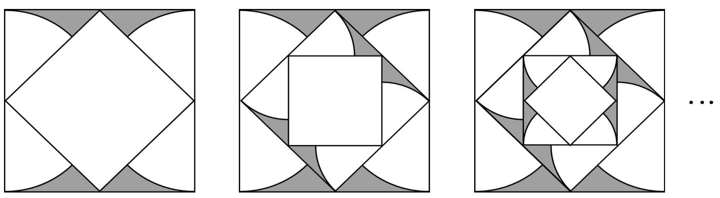


① $\frac{9-2\pi}{3}$ ② $\frac{18-4\pi}{5}$ ③ $\frac{9-2\pi}{2}$

④ $\frac{18-4\pi}{3}$ ⑤ $9-2\pi$

[출처] 2012 모의_공공 교육청 고2 09월 30

11. 그림과 같이 한 변의 길이가 4인 정사각형 R의 한 변을 지름으로 하는 두 개의 반원을 접하게 그리고 정사각형 R의 각 변의 중점을 연결한 정사각형 R_1을 붙여서 만든 모양에 색칠하여 얻은 그림을 T_1이라 하자. 그림 T_1에서 정사각형 R_1의 한 변을 지름으로 하는 두 개의 반원을 접하게 그리고 정사각형 R_1의 각 변의 중점을 연결한 정사각형 R_2를 붙여서 만든 모양에 색칠하여 얻은 그림을 T_2라 하자. 그림 T_2에서 정사각형 R_2의 한 변을 지름으로 하는 두 개의 반원을 접하게 그리고 정사각형 R_2의 각 변의 중점을 연결한 정사각형 R_3을 붙여서 만든 모양에 색칠하여 얻은 그림을 T_3이라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림을 T_n이라 하고 그림 T_n에 색칠되어 있는 모든 모양의 넓이의 합을 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n = p + q\pi$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 유리수이다.)

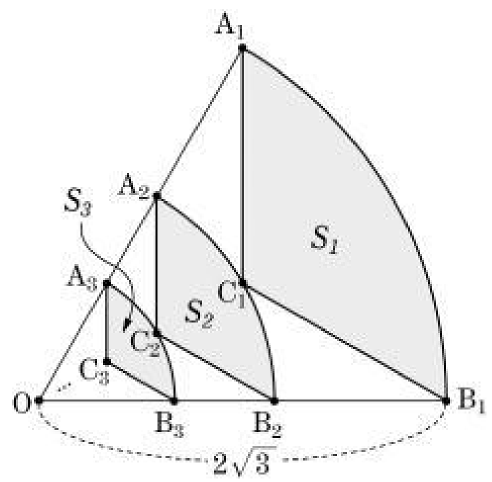


T_1 T_2 T_3 …

[출처] 2012 모의_공공 교육청 고3 03월 13

[출처] 2012 모의_공공 교육청 고3 03월 13

12. 그림과 같이 반지름의 길이가 $2\sqrt{3}$이고 $\angle A_1OB_1 = 60^\circ$인 부채꼴 A_1OB_1이 있다. 세 점 A_1, O, B_1을 꼭짓점으로 하는 삼각형 A_1OB_1의 무게중심을 C_1이라 할 때, 두 선분 A_1C_1, B_1C_1과 호 A_1B_1로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_1이라 하자. 점 O를 중심으로 하고 점 C_1을 지나는 원이 두 선분 OA_1, OB_1과 만나는 점을 각각 A_2, B_2라 하자. 세 점 A_2, O, B_2를 꼭짓점으로 하는 삼각형 A_2OB_2의 무게중심을 C_2라 할 때, 두 선분 A_2C_2, B_2C_2와 호 A_2B_2로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_2라 하자. 점 O를 중심으로 하고 점 C_2를 지나는 원이 두 선분 OA_2, OB_2와 만나는 점을 각각 A_3, B_3이라 하자. 세 점 A_3, O, B_3을 꼭짓점으로 하는 삼각형 A_3OB_3의 무게중심을 C_3이라 할 때, 두 선분 A_3C_3, B_3C_3과 호 A_3B_3으로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_3이라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 도형의 넓이를 S_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값은?

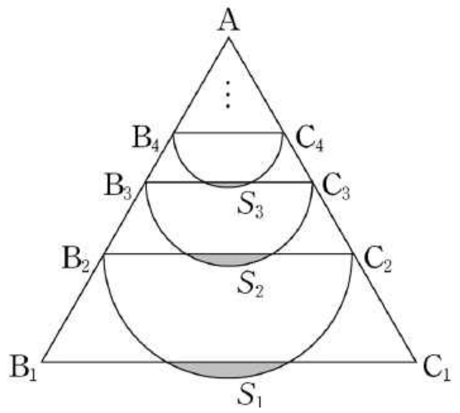


① $2\pi - \sqrt{3}$ ② $2\pi - 2\sqrt{3}$ ③ $2\pi - 3\sqrt{3}$
④ $3\pi - 3\sqrt{3}$ ⑤ $3\pi - 4\sqrt{3}$

[출처] 2012 모의_공공 평가원 고3 06월 12

[출처] 2012 모의_공공 평가원 고3 06월 12

13. 한 변의 길이가 3인 정삼각형 AB_1C_1이 있다. 그림과 같이 선분 AB_1과 선분 AC_1을 $2:1$로 내분하는 점을 각각 B_2, C_2라 하고, 선분 B_2C_2를 지름으로 하는 원의 호 B_2C_2와 선분 B_1C_1로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_1이라 하자.
정삼각형 AB_2C_2에서 선분 AB_2와 선분 AC_2를 $2:1$로 내분하는 점을 각각 B_3, C_3이라 하고, 선분 B_3C_3을 지름으로 하는 원의 호 B_3C_3과 선분 B_2C_2로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_2라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값은?



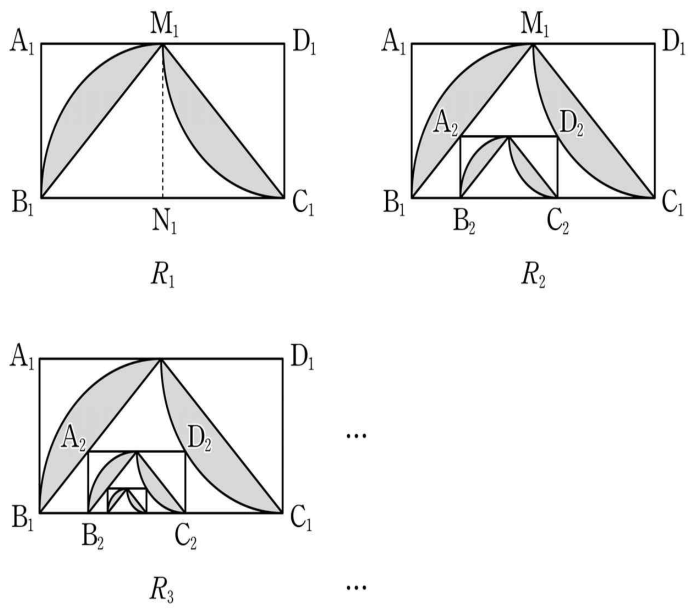
① $\frac{3\pi-5\sqrt{3}}{10}$ ② $\frac{6\pi-9\sqrt{3}}{20}$ ③ $\frac{4\pi-5\sqrt{3}}{10}$

④ $\frac{8\pi-9\sqrt{3}}{20}$ ⑤ $\frac{10\pi-9\sqrt{3}}{20}$

[출처] 2013 모의_공공 평가원 고3 11월 15

[출처] 2013 모의_공공 평가원 고3 11월 17

14. 직사각형 $A_1B_1C_1D_1$에서 $\overline{A_1B_1}=1$, $\overline{A_1D_1}=2$이다. 그림과 같이 선분 A_1D_1과 선분 B_1C_1의 중점을 각각 M_1, N_1이라 하자. 중심이 N_1, 반지름의 길이가 $\overline{B_1N_1}$이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$인 부채꼴 $N_1M_1B_1$을 그리고, 중심이 D_1, 반지름의 길이가 $\overline{C_1D_1}$이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$인 부채꼴 $D_1M_1C_1$을 그린다. 부채꼴 $N_1M_1B_1$의 호 M_1B_1과 선분 M_1B_1로 둘러싸인 부분과 부채꼴 $D_1M_1C_1$의 호 M_1C_1과 선분 M_1C_1로 둘러싸인 부분인 모양에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자. 그림 R_1에 선분 M_1B_1 위의 점 A_2, 호 M_1C_1 위의 점 D_2와 변 B_1C_1 위의 두 점 B_2, C_2를 꼭짓점으로 하고 $\overline{A_2B_2}:\overline{A_2D_2}=1:2$인 직사각형 $A_2B_2C_2D_2$를 그리고, 직사각형 $A_2B_2C_2D_2$에서 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 만들어지는 모양에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은?



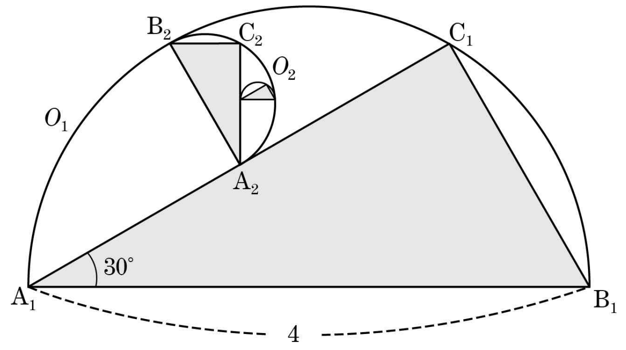
① $\frac{25}{19}\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$ ② $\frac{5}{4}\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$ ③ $\frac{25}{21}\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$

④ $\frac{25}{22}\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$ ⑤ $\frac{25}{23}\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$

[출처] 2013 모의_공공 교육청 고3 03월 10

[출처] 2013 모의_공공 교육청 고3 03월 16

15. 그림과 같이 길이가 4인 선분 $\mathrm{A_1B_1}$을 지름으로 하는 반원 O_1을 그리고, 반원 O_1 위에 $\angle \mathrm{C_1A_1B_1}=30°$가 되도록 점 $\mathrm{C_1}$을 정한다. 이때 삼각형 $\mathrm{A_1B_1C_1}$의 넓이를 S_1이라 하자. 선분 $\mathrm{A_1C_1}$의 중점을 $\mathrm{A_2}$라 하고, 호 $\mathrm{A_1B_2}$와 호 $\mathrm{C_1B_2}$의 길이가 같도록 점 $\mathrm{B_2}$를 정한다. 선분 $\mathrm{A_2B_2}$를 지름으로 하는 반원 O_2를 그리고, 반원 O_2 위에 $\angle \mathrm{C_2A_2B_2}=30°$가 되도록 점 $\mathrm{C_2}$를 정한다. 이때 삼각형 $\mathrm{A_2B_2C_2}$의 넓이를 S_2라 하자. 선분 $\mathrm{A_2C_2}$의 중점을 $\mathrm{A_3}$이라 하고, 호 $\mathrm{A_2B_3}$과 호 $\mathrm{C_2B_3}$의 길이가 같도록 점 $\mathrm{B_3}$을 정한다. 선분 $\mathrm{A_3B_3}$을 지름으로 하는 반원 O_3을 그리고, 반원 O_3 위에 $\angle \mathrm{C_3A_3B_3}=30°$가 되도록 점 $\mathrm{C_3}$을 정한다. 이때 삼각형 $\mathrm{A_3B_3C_3}$의 넓이를 S_3이라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 얻은 삼각형 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n$의 넓이를 S_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값은?

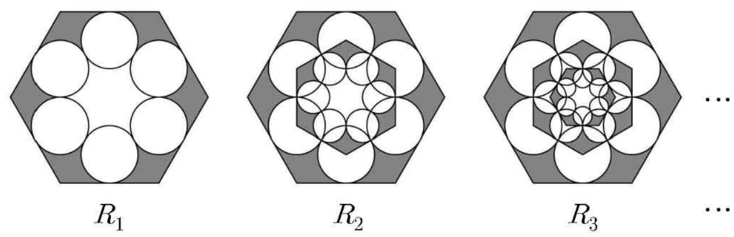


① $2\sqrt{3}$ ② $\frac{32\sqrt{3}}{15}$ ③ $\frac{34\sqrt{3}}{15}$

④ $\frac{12\sqrt{3}}{5}$ ⑤ $\frac{38\sqrt{3}}{15}$

[출처] 2014 모의_공공 교육청 고2 09월 20

16. 한 변의 길이가 2인 정육각형 A_1이 있다. 그림과 같이 A_1의 내부에 반지름의 길이가 같은 원 6개를 서로 외접하면서 A_1의 각 변의 중점에 접하도록 그리고 A_1의 내부와 6개의 원의 외부로 이루어진 영역 중 A_1의 각 변과 원으로 둘러싸인 부분에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자. 그림 R_1에 그려진 6개의 원의 중심을 꼭짓점으로 하는 정육각형을 A_2라 하자. 그림 R_1에 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 A_2의 내부에 반지름의 길이가 같은 원 6개를 서로 외접하면서 A_2의 각 변의 중점에 접하도록 그리고 A_2의 내부와 A_2의 내부에 그린 6개의 원의 외부로 이루어진 영역 중 A_2의 각 변과 원으로 둘러싸인 부분에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.
그림 R_2에 새로 그려진 6개의 원의 중심을 꼭짓점으로 하는 정육각형을 A_3이라 하자. 그림 R_2에 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 A_3의 내부에 반지름의 길이가 같은 원 6개를 서로 외접하면서 A_3의 각 변의 중점에 접하도록 그리고 A_3의 내부와 A_3의 내부에 그린 6개의 원의 외부로 이루어진 영역 중 A_3의 각 변과 원으로 둘러싸인 부분에 색칠하여 얻은 그림을 R_3이라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은?



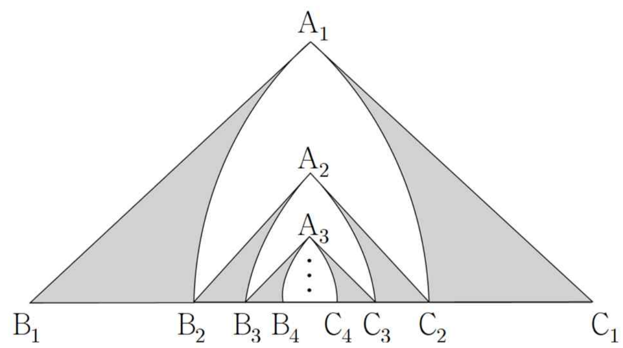
① $4\sqrt{3}-\pi$ ② $6\sqrt{3}-2\pi$ ③ $4\sqrt{3}-\frac{\pi}{2}$

④ $6\sqrt{3}-\pi$ ⑤ $8\sqrt{3}-2\pi$

[출처] 2014 모의_공공 교육청 고3 07월

[출처] 2014 모의_공공 교육청 고3 07월 30

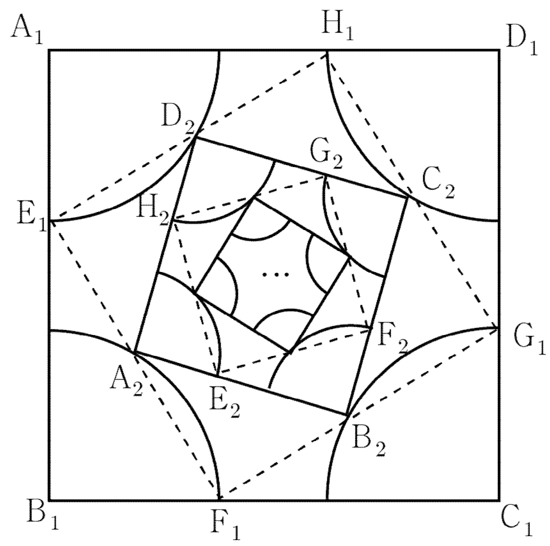
17. 그림과 같이 길이가 4인 선분 B_1C_1을 빗변으로 하고 $\angle B_1A_1C_1 = 90^\circ$ 인 직각이등변삼각형 $A_1B_1C_1$을 그린다. $\overline{B_1A_1} = \overline{B_1C_2}$ 이고 $\overline{C_1A_1} = \overline{C_1B_2}$ 인 선분 B_1C_1 위의 두 점 C_2 와 B_2 에 대하여 부채꼴 $B_1A_1C_2$ 와 부채꼴 $C_1A_1B_2$ 를 그린 후 생긴 모양에 색칠하고 그 넓이를 S_1 이라 하자.
선분 B_2C_2 를 빗변으로 하고 삼각형 $A_1B_1C_1$ 의 내부의 점 A_2 에 대하여 $\angle B_2A_2C_2 = 90^\circ$ 인 직각이등변삼각형 $A_2B_2C_2$ 를 그린다. $\overline{B_2A_2} = \overline{B_2C_3}$ 이고 $\overline{C_2A_2} = \overline{C_2B_3}$ 인 선분 B_2C_2 위의 두 점 C_3 과 B_3 에 대하여 부채꼴 $B_2A_2C_3$ 과 부채꼴 $C_2A_2B_3$ 을 그린 후 생긴 모양에 색칠하고 그 넓이를 S_2 라 하자.
선분 B_3C_3 을 빗변으로 하고 삼각형 $A_2B_2C_2$ 의 내부의 점 A_3 에 대하여 $\angle B_3A_3C_3 = 90^\circ$ 인 직각이등변삼각형 $A_3B_3C_3$ 을 그린다. $\overline{B_3A_3} = \overline{B_3C_4}$ 이고 $\overline{C_3A_3} = \overline{C_3B_4}$ 인 선분 B_3C_3 위의 두 점 C_4 와 B_4 에 대하여 부채꼴 $B_3A_3C_4$ 와 부채꼴 $C_3A_3B_4$ 를 그린 후 생긴 모양에 색칠하고 그 넓이를 S_3 이라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 얻은 S_n 에 대하여 $\dfrac{1}{4-\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} S_n = a + \sqrt{b}$ (a, b 는 정수)일 때, $a^2 + b^2$ 의 값을 구하시오.



[출처] 2014 모의_공공 교육청 고3 04월 16

[출처] 2014 모의_공공 교육청 고3 04월 18

18. 그림과 같이 한 변의 길이가 3인 정사각형 $A_1B_1C_1D_1$ 이 있다. 네 선분 A_1B_1, B_1C_1, C_1D_1, D_1A_1 을 각각 $1:2$ 로 내분하는 점을 각각 E_1, F_1, G_1, H_1 이라 하고, 정사각형 $A_1B_1C_1D_1$ 의 네 꼭짓점을 중심으로 하고 네 선분 A_1E_1, B_1F_1, C_1G_1, D_1H_1 을 각각 반지름으로 하는 4개의 사분원을 잘라내어 얻은 모양의 도형을 R_1 이라 하자. 정사각형 $E_1F_1G_1H_1$ 과 도형 R_1 과의 교점 중 정사각형 $E_1F_1G_1H_1$ 의 꼭짓점이 아닌 4개의 점을 A_2, B_2, C_2, D_2 라 하자. 정사각형$A_2B_2C_2D_2$ 에서 네 선분 A_2B_2, B_2C_2, C_2D_2, D_2A_2 를 각각 $1:2$ 로 내분하는 점을 각각 E_2, F_2, G_2, H_2 라 하고, 정사각형 $A_2B_2C_2D_2$ 의 네 꼭짓점을 중심으로 하고 네 선분 A_2E_2, B_2F_2, C_2G_2, D_2H_2 를 각각 반지름으로 하는 4개의 사분원을 잘라내어 얻은 모양의 도형을 R_2 라 하자. 정사각형 $E_2F_2G_2H_2$ 에서 도형 R_2 를 얻는 것과 같은 방법으로 얻은 모양의 도형을 R_3 이라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n 번째 얻은 모양의 도형 R_n 의 넓이를 S_n 이라 할 때, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} S_n$ 의 값은?



① $\dfrac{39}{32}(9-\pi)$ ② $\dfrac{5}{4}(9-\pi)$ ③ $\dfrac{21}{16}(9-\pi)$
④ $\dfrac{11}{8}(9-\pi)$ ⑤ $\dfrac{45}{32}(9-\pi)$

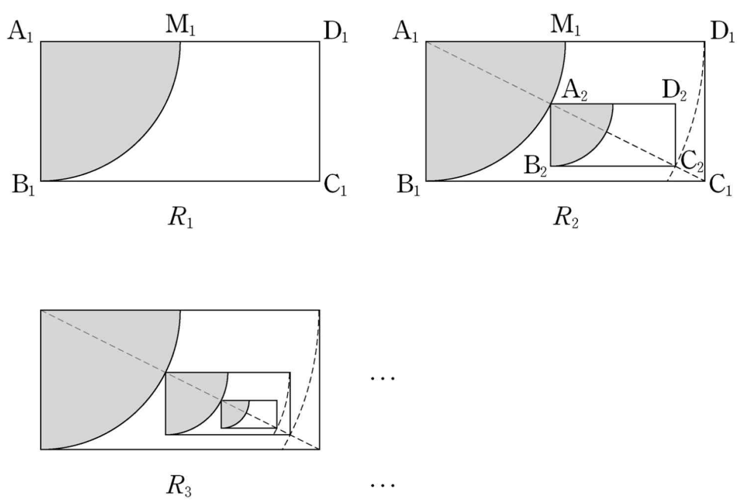
[출처] 2014 모의_공공 평가원 고3 06월

[출처] 2014 모의_공공 평가원 고3 06월

19. 그림과 같이 $\overline{\mathrm{A_1D_1}}=2$, $\overline{\mathrm{A_1B_1}}=1$인 직사각형 $\mathrm{A_1B_1C_1D_1}$에서 선분 $\mathrm{A_1D_1}$의 중점을 $\mathrm{M_1}$이라 하자. 중심이 $\mathrm{A_1}$, 반지름의 길이가 $\overline{\mathrm{A_1B_1}}$이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$인 부채꼴 $\mathrm{A_1B_1M_1}$을 그리고, 부채꼴 $\mathrm{A_1B_1M_1}$에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

그림 R_1에서 부채꼴 $\mathrm{A_1B_1M_1}$의 호 $\mathrm{B_1M_1}$이 선분 $\mathrm{A_1C_1}$과 만나는 점을 $\mathrm{A_2}$라 하고, 중심이 $\mathrm{A_1}$, 반지름의 길이가 $\overline{\mathrm{A_1D_1}}$인 원이 선분 $\mathrm{A_1C_1}$과 만나는 점을 $\mathrm{C_2}$라 하자. 가로와 세로의 길이의 비가 $2:1$이고 가로가 선분 $\mathrm{A_1D_1}$과 평행한 직사각형 $\mathrm{A_2B_2C_2D_2}$를 그리고, 직사각형 $\mathrm{A_2B_2C_2D_2}$에서 그림 R_1을 얻는 것과 같은 방법으로 만들어지는 부채꼴에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은?

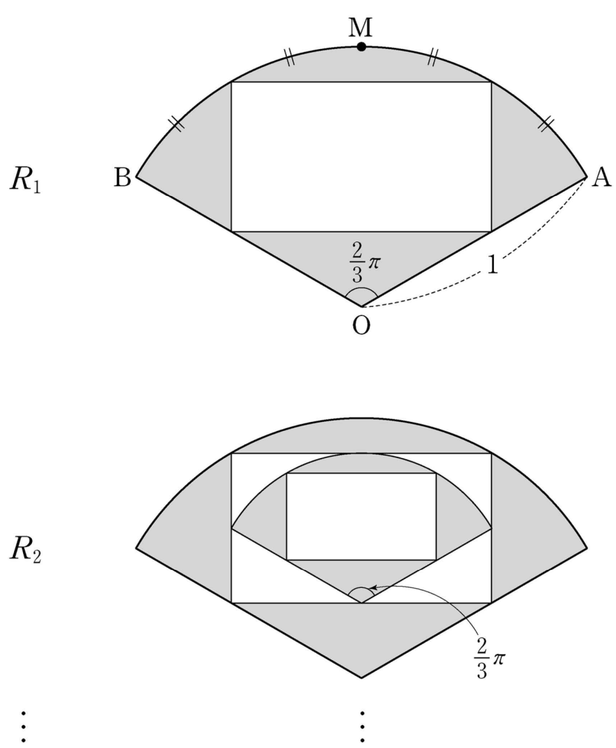


① $\frac{5}{16}\pi$　② $\frac{11}{32}\pi$　③ $\frac{3}{8}\pi$
④ $\frac{13}{32}\pi$　⑤ $\frac{7}{16}\pi$

[출처] 2014 모의_공공 평가원 고3 09월

[출처] 2014 모의_공공 평가원 고3 09월

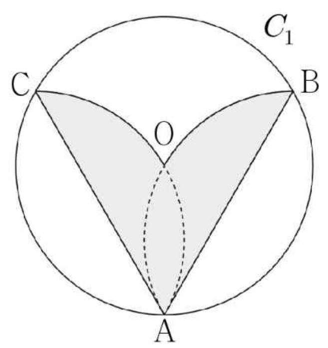
20. 중심이 O, 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가 $\frac{2}{3}\pi$인 부채꼴 OAB가 있다. 그림과 같이 호 AB를 이등분하는 점을 M이라 하고 호 AM과 호 MB를 각각 이등분하는 점을 두 꼭짓점으로 하는 직사각형을 부채꼴 OAB에 내접하도록 그리고, 부채꼴의 내부와 직사각형의 외부의 공통부분에 색칠하여 얻은 그림을 $\mathrm{R_1}$이라 하자. 그림 $\mathrm{R_1}$에 직사각형의 네 변의 중점을 모두 지나도록 중심각의 크기가 $\frac{2}{3}\pi$인 부채꼴을 그리고, 이 부채꼴에 그림 R_1을 얻는 것과 같은 방법으로 직사각형을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자. 그림 R_2에 새로 그려진 직사각형의 네 변의 중점을 모두 지나도록 중심각의 크기가 $\frac{2}{3}\pi$인 부채꼴을 그리고, 이 부채꼴에 그림 R_1을 얻는 것과 같은 방법으로 직사각형을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_3이라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은?



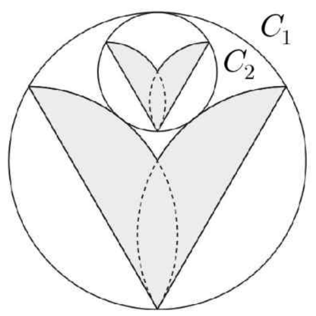
① $\frac{2\pi-3\sqrt{3}}{2}$　② $\frac{\pi-\sqrt{2}}{3}$　③ $\frac{2\pi-3\sqrt{2}}{3}$
④ $\frac{\pi-\sqrt{3}}{2}$　⑤ $\frac{2\pi-2\sqrt{3}}{3}$

[출처] 2014 모의_공공 교육청 고2 11월 21

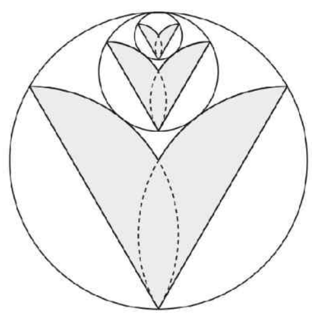
21. 그림과 같이 중심이 O이고 반지름의 길이가 1인 원 C_1이 있다. 원 C_1 위의 한 점 A를 잡고, 원 C_1과 반지름의 길이가 같고 두 점 O, A를 지나는 두 원이 원 C_1과 만나는 점 중에서 점 A가 아닌 점을 각각 B, C라 할 때, 선분 CA, 선분 AB, 호 BO, 호 OC로 둘러싸인 ♡모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자. 그림 R_1에 원 C_1, 호 BO, 호 OC와 모두 접하는 원 C_2를 그린 후 원 C_2에 그림 R_1을 얻는 것과 같은 방법으로 만들어지는 ♡모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은?



R_1



R_2



⋯

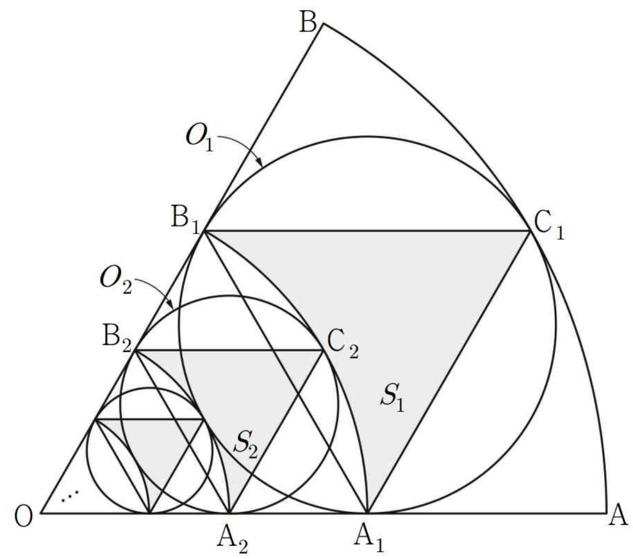
R_3 ⋯

① $\frac{22}{63}\pi$ ② $\frac{23}{63}\pi$ ③ $\frac{8}{21}\pi$

④ $\frac{25}{63}\pi$ ⑤ $\frac{26}{63}\pi$

[출처] 2015 모의_공공 교육청 고3 04월 18

22. 그림과 같이 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{3}$이고 반지름의 길이가 6인 부채꼴 OAB가 있다. 부채꼴 OAB에 내접하는 원 O_1이 두 선분 OA, OB, 호 AB와 만나는 점을 각각 A_1, B_1, C_1이라 하고, 부채꼴 OA_1B_1의 외부와 삼각형 $A_1C_1B_1$의 내부의 공통부분의 넓이를 S_1이라 하자. 부채꼴 OA_1B_1에 내접하는 원 O_2가 두 선분 OA_1, OB_1, 호 A_1B_1과 만나는 점을 각각 A_2, B_2, C_2라 하고, 부채꼴 OA_2B_2의 외부와 삼각형 $A_2C_2B_2$의 내부의 공통부분의 넓이를 S_2라 하자.
위와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 부채꼴 OA_nB_n의 외부와 삼각형 $A_nC_nB_n$의 내부의 공통부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값은?



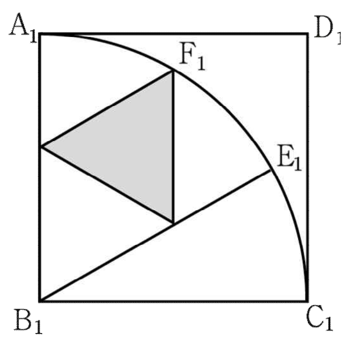
① $8\sqrt{3}-3\pi$ ② $8\sqrt{3}-2\pi$ ③ $9\sqrt{3}-3\pi$

④ $9\sqrt{3}-2\pi$ ⑤ $10\sqrt{3}-3\pi$

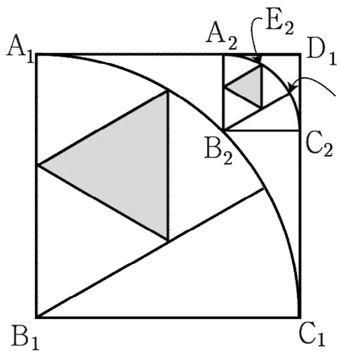
[출처] 2016 모의_공공 교육청 고2 09월 20

[출처] 2016 모의_공공 교육청 고2 09월 21

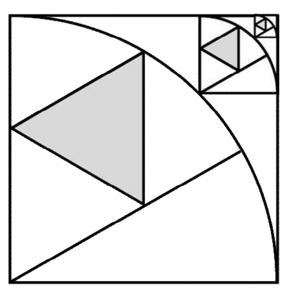
23. 그림과 같이 한 변의 길이가 2인 정사각형 $A_1B_1C_1D_1$에서 중심을 B_1, 선분 B_1C_1을 반지름으로 하고 중심각의 크기가 $90°$인 부채꼴 $B_1C_1A_1$을 그린다. 부채꼴 $B_1C_1A_1$의 호 C_1A_1을 삼등분하는 두 점을 각각 E_1, F_1이라 하고, 선분 B_1E_1을 그린다. 점 F_1을 한 꼭짓점으로 하고 부채꼴 $B_1E_1A_1$에 내접하는 정삼각형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자. 그림 R_1에 점 D_1과 부채꼴 $B_1C_1A_1$의 호 C_1A_1을 이등분하는 점 B_2를 대각선의 양 끝점으로 하는 정사각형 $A_2B_2C_2D_1$을 그리고, 정사각형 $A_2B_2C_2D_1$에 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 만들어지는 정삼각형에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? (단, $\angle A_nB_nE_n = 60°$)



R_1



R_2



R_3 ⋯

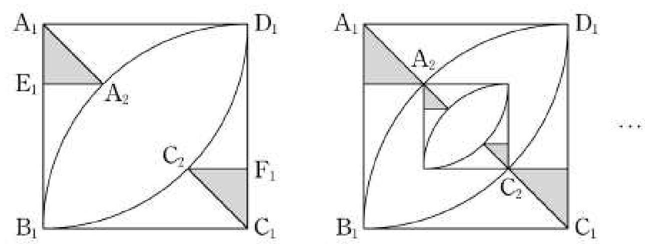
① $\dfrac{3\sqrt{6}+2\sqrt{3}}{21}$　② $\dfrac{4\sqrt{6}+2\sqrt{3}}{21}$

③ $\dfrac{4\sqrt{6}+3\sqrt{3}}{21}$　④ $\dfrac{5\sqrt{6}+2\sqrt{3}}{21}$

⑤ $\dfrac{5\sqrt{6}+3\sqrt{3}}{21}$

[출처] 2016 모의_공공 평가원 고3 09월 16

24. 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정사각형 $A_1B_1C_1D_1$ 안에 꼭짓점 A_1, C_1을 중심으로 하고 선분 A_1B_1, C_1D_1을 반지름으로 하는 사분원을 각각 그린다. 선분 A_1C_1이 두 사분원과 만나는 점 중 A_1과 가까운 점을 A_2, 점 C_1과 가까운 점을 C_2라 하자. 선분 A_1D_1에 평행하고 점 A_2를 지나는 직선이 선분 A_1B_1과 만나는 점을 E_1, 선분 B_1C_1에 평행하고 점 C_2를 지나는 직선이 선분 C_1D_1과 만나는 점을 F_1이라 하자. 삼각형 $A_1E_1A_2$와 삼각형 $C_1F_1C_2$를 그린 후 두 삼각형의 내부에 속하는 영역을 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자. 그림 R_1에 선분 A_2C_2를 대각선으로 하는 정사각형을 그리고, 새로 그려진 정사각형 안에 그림 R_1을 얻는 것과 같은 방법으로 두 개의 사분원과 두 개의 삼각형을 그리고 두 삼각형의 내부에 속하는 영역을 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은?



R_1　R_2　⋯

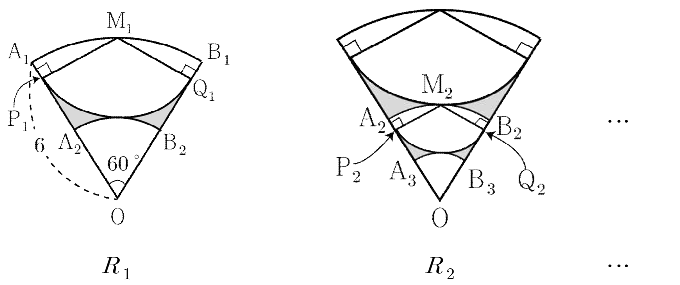
① $\dfrac{1}{12}(\sqrt{2}-1)$　② $\dfrac{1}{6}(\sqrt{2}-1)$　③ $\dfrac{1}{4}(\sqrt{2}-1)$

④ $\dfrac{1}{3}(\sqrt{2}-1)$　⑤ $\dfrac{5}{12}(\sqrt{2}-1)$

[출처] 2016 모의_공공 교육청 고2 11월 18

[출처] 2016 모의_공공 교육청 고2 11월 16

25. 중심이 O, 반지름의 길이가 6이고 중심각의 크기가 60° 인 부채꼴 $\mathrm{OA_1B_1}$ 이 있다. 그림과 같이 호 $\mathrm{A_1B_1}$ 을 이등분하는 점 $\mathrm{M_1}$ 에서 두 선분 $\mathrm{OA_1}$, $\mathrm{OB_1}$ 에 내린 수선의 발을 각각 $\mathrm{P_1}$, $\mathrm{Q_1}$ 이라 하고, 중심이 $\mathrm{M_1}$, 반지름의 길이가 $\overline{\mathrm{M_1P_1}}$ 인 부채꼴 $\mathrm{M_1P_1Q_1}$ 을 그린다. 점 O를 중심으로 하고 호 $\mathrm{P_1Q_1}$ 에 접하는 원이 두 선분 $\mathrm{OA_1}$, $\mathrm{OB_1}$ 과 만나는 점을 각각 $\mathrm{A_2}$, $\mathrm{B_2}$ 라 할 때, 호 $\mathrm{P_1Q_1}$, 호 $\mathrm{A_2B_2}$, 선분 $\mathrm{P_1A_2}$, 선분 $\mathrm{Q_1B_2}$ 로 둘러싸인 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1 이라 하자. 그림 R_1 에 호 $\mathrm{A_2B_2}$ 를 이등분하는 점 $\mathrm{M_2}$ 에서 두 선분 $\mathrm{OA_2}$, $\mathrm{OB_2}$ 에 내린 수선의 발을 각각 $\mathrm{P_2}$, $\mathrm{Q_2}$ 라 하고, 중심이 $\mathrm{M_2}$, 반지름의 길이가 $\overline{\mathrm{M_2P_2}}$ 인 부채꼴 $\mathrm{M_2P_2Q_2}$ 를 그린다. 점 O를 중심으로 하고 호 $\mathrm{P_2Q_2}$ 에 접하는 원이 두 선분 $\mathrm{OA_2}$, $\mathrm{OB_2}$ 와 만나는 점을 각각 $\mathrm{A_3}$, $\mathrm{B_3}$ 이라 할 때, 호 $\mathrm{P_2Q_2}$, 호 $\mathrm{A_3B_3}$, 선분 $\mathrm{P_2A_3}$, 선분 $\mathrm{Q_2B_3}$ 으로 둘러싸인 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_2 라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n 번째 얻은 그림 R_n 에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n 이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$ 의 값은?

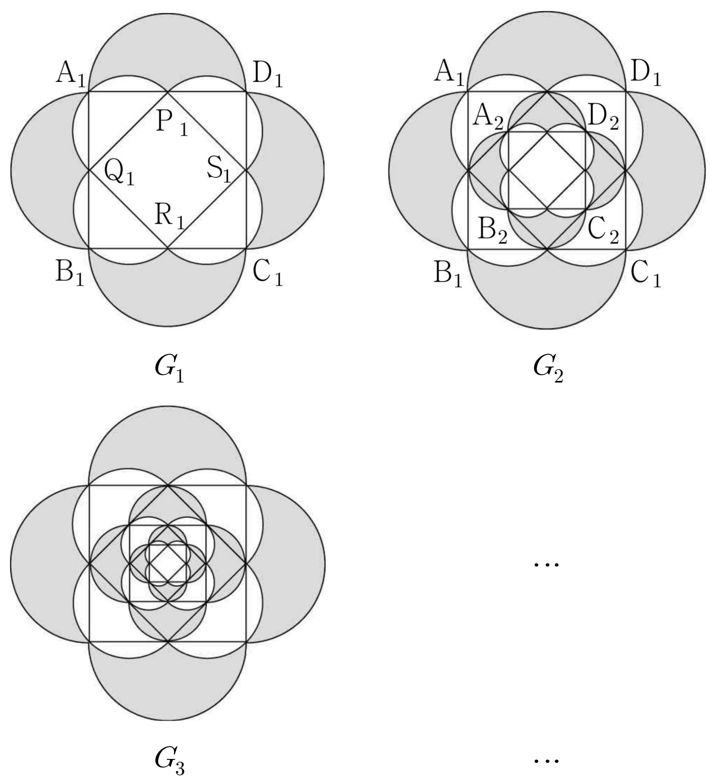


① $6(2\sqrt{3}-\pi)$ ② $7(2\sqrt{3}-\pi)$ ③ $8(2\sqrt{3}-\pi)$

④ $9(2\sqrt{3}-\pi)$ ⑤ $10(2\sqrt{3}-\pi)$

[출처] 2016 모의_공공 교육청 고3 07월 15

26. 그림과 같이 한 변의 길이가 2인 정사각형 $\mathrm{A_1B_1C_1D_1}$ 이 있다. 네 변 $\mathrm{A_1B_1}$, $\mathrm{B_1C_1}$, $\mathrm{C_1D_1}$, $\mathrm{D_1A_1}$ 을 각각 지름으로 하는 반원을 정사각형 $\mathrm{A_1B_1C_1D_1}$ 의 외부에 그려 만들어진 4개의 호로 둘러싸인 모양의 도형을 E_1 이라 하자. 네 변 $\mathrm{D_1A_1}$, $\mathrm{A_1B_1}$, $\mathrm{B_1C_1}$, $\mathrm{C_1D_1}$ 의 중점 $\mathrm{P_1}$, $\mathrm{Q_1}$, $\mathrm{R_1}$, $\mathrm{S_1}$ 을 꼭짓점으로 하는 정사각형에 도형 E_1 을 얻는 것과 같은 방법으로 만들어지는 모양의 도형을 F_1 이라 하자. 도형 E_1 의 내부와 도형 F_1 의 외부의 공통부분에 색칠하여 얻은 그림을 G_1 이라 하자. 그림 G_1 에 네 변 $\mathrm{P_1Q_1}$, $\mathrm{Q_1R_1}$, $\mathrm{R_1S_1}$, $\mathrm{S_1P_1}$ 의 중점 $\mathrm{A_2}$, $\mathrm{B_2}$, $\mathrm{C_2}$, $\mathrm{D_2}$ 를 꼭짓점으로 하는 정사각형을 그리고 도형 E_1 을 얻는 것과 같은 방법으로 새로 만들어지는 모양의 도형을 E_2 라 하자. 네 변 $\mathrm{D_2A_2}$, $\mathrm{A_2B_2}$, $\mathrm{B_2C_2}$, $\mathrm{C_2D_2}$ 의 중점 $\mathrm{P_2}$, $\mathrm{Q_2}$, $\mathrm{R_2}$, $\mathrm{S_2}$ 를 꼭짓점으로 하는 정사각형을 그리고 도형 E_1 을 얻는 것과 같은 방법으로 새로 만들어지는 모양의 도형을 F_2 라 하자. 그림 G_1 에 도형 E_2 의 내부와 도형 F_2 의 외부의 공통부분에 색칠하여 얻은 그림을 G_2 라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n 번째 얻은 그림 G_n 에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 T_n 이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} T_n$ 의 값은?

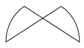


① $\frac{4}{3}(\pi+2)$ ② $\frac{3}{2}(\pi+2)$ ③ $\frac{5}{3}(\pi+2)$

④ $\frac{4}{3}(\pi+4)$ ⑤ $\frac{5}{3}(\pi+4)$

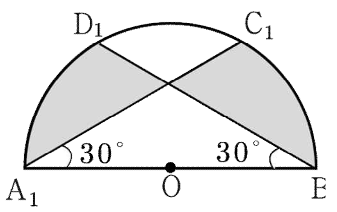
[출처] 2016 모의_공공 교육청 고2 06월 21

[출처] 2016 모의_공공 교육청 고2 06월 20

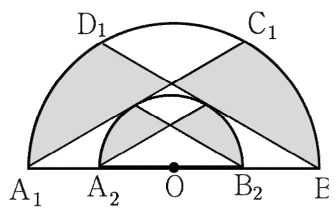
27. 중심이 O이고 길이가 4인 선분 A_1B_1을 지름으로 하는 반원이 있다. 그림과 같이 반원 위에 $\angle C_1A_1B_1=30^\circ$, $\angle D_1B_1A_1=30^\circ$가 되도록 두 점 C_1, D_1을 각각 정하고, 두 선분 A_1C_1, B_1D_1과 두 호 B_1C_1, A_1D_1로 둘러싸인  모양에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자. 그림 R_1에서 중심이 O이고 두 선분 A_1C_1, B_1D_1에 접하는 원이 선분 A_1B_1과 만나는 점을 각각 A_2, B_2라 하자. 선분 A_2B_2를 지름으로 하는 반원에 그림 R_1을 얻는 것과 같은 방법으로 만들어지는 모양에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때,

$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a\pi + b\sqrt{3}}{9}$ 이다. $a+b$의 값은?

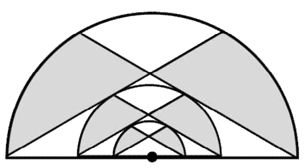
(단, a, b는 정수이다.)



R_1



R_2



R_3

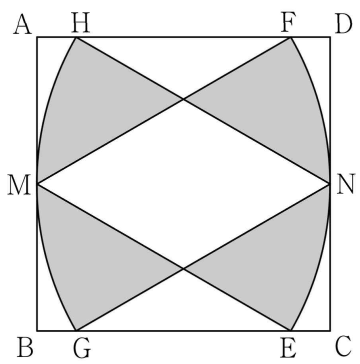
…

① 8 ② 9 ③ 10

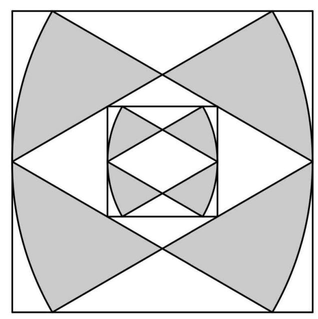
④ 11 ⑤ 12

[출처] 2016 모의_공공 사관학교 고3 07월 19

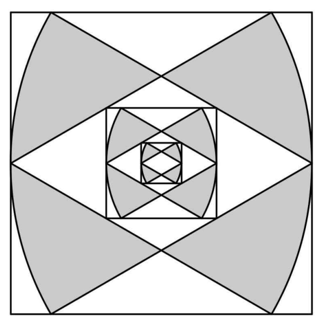
28. 그림과 같이 한 변의 길이가 6인 정사각형 ABCD가 있다. 두 선분 AB, CD의 중점을 각각 M, N이라 하자. 두 선분 BC, AD 위에 $\overline{ME}=\overline{MF}=\overline{AB}$가 되도록 각각 점 E, F를 잡고, 중심이 M인 부채꼴 MEF를 그린다. 두 선분 BC, AD 위에 $\overline{NG}=\overline{NH}=\overline{AB}$가 되도록 각각 점 G, H를 잡고, 중심이 N인 부채꼴 NHG를 그린다. 두 부채꼴 MEF, NHG의 내부에서 공통부분을 제외한 나머지 부분에 와 같이 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.
그림 R_1에서 두 부채꼴 MEF, NHG의 공통부분인 마름모의 각 변에 꼭짓점이 있고, 네 변이 정사각형 ABCD의 네 변과 각각 평행한 정사각형을 그린다. 새로 그려진 정사각형에 그림 R_1을 얻은 방법과 같은 방법으로 2개의 부채꼴을 각각 그린 다음 2개의 부채꼴의 내부에서 공통부분을 제외한 나머지 부분에 와 같이 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에서 색칠된 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은?



R_1



R_2



R_3

…

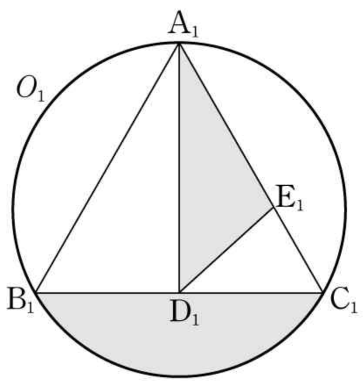
① $8\sqrt{3}(\pi-\sqrt{3})$ ② $9\sqrt{3}(\pi-\sqrt{3})$

③ $10\sqrt{3}(\pi-\sqrt{3})$ ④ $11\sqrt{3}(\pi-\sqrt{3})$

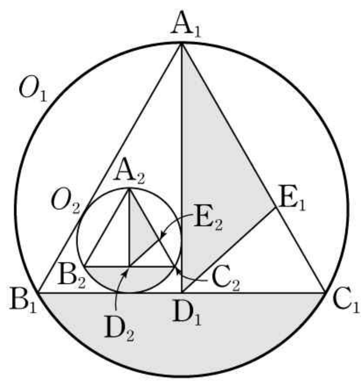
⑤ $12\sqrt{3}(\pi-\sqrt{3})$

[출처] 2017 모의_공공 평가원 고3 09월 18

29. 그림과 같이 반지름의 길이가 2인 원 O_1에 내접하는 정삼각형 $\mathrm{A_1B_1C_1}$이 있다. 점 $\mathrm{A_1}$에서 선분 $\mathrm{B_1C_1}$에 내린 수선의 발을 $\mathrm{D_1}$이라 하고, 선분 $\mathrm{A_1C_1}$을 $2:1$로 내분하는 점을 $\mathrm{E_1}$이라 하자. 점 $\mathrm{A_1}$을 포함하지 않는 호 $\mathrm{B_1C_1}$과 선분 $\mathrm{B_1C_1}$로 둘러싸인 도형의 내부와 삼각형 $\mathrm{A_1D_1E_1}$의 내부를 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자. 그림 R_1에 삼각형 $\mathrm{A_1B_1D_1}$에 내접하는 원 O_2와 원 O_2에 내접하는 정삼각형 $\mathrm{A_2B_2C_2}$를 그리고, 점 $\mathrm{A_2}$에서 선분 $\mathrm{B_2C_2}$에 내린 수선의 발을 $\mathrm{D_2}$, 선분 $\mathrm{A_2C_2}$를 $2:1$로 내분하는 점을 $\mathrm{E_2}$라 하자. 점 $\mathrm{A_2}$를 포함하지 않는 호 $\mathrm{B_2C_2}$와 선분 $\mathrm{B_2C_2}$로 둘러싸인 도형의 내부와 삼각형 $\mathrm{A_2D_2E_2}$의 내부를 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은?



R_1



R_2

① $\dfrac{16(3\sqrt{3}-2)\pi}{69}$ ② $\dfrac{16(3\sqrt{3}-1)\pi}{65}$

③ $\dfrac{32(3\sqrt{3}-2)\pi}{69}$ ④ $\dfrac{32(3\sqrt{3}-1)\pi}{69}$

⑤ $\dfrac{32(3\sqrt{3}-1)\pi}{65}$

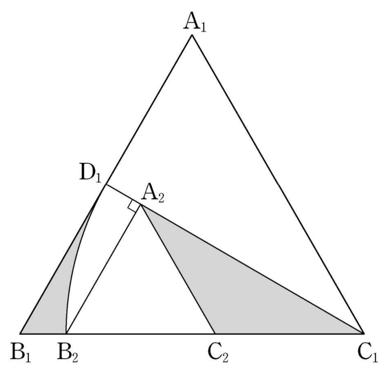
[출처] 2017 모의_공공 평가원 고3 11월 19

30. 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정삼각형 $\mathrm{A_1B_1C_1}$이 있다. 선분 $\mathrm{A_1B_1}$의 중점을 $\mathrm{D_1}$이라 하고, 선분 $\mathrm{B_1C_1}$ 위의 $\overline{\mathrm{C_1D_1}}=\overline{\mathrm{C_1B_2}}$인 점 $\mathrm{B_2}$에 대하여 중심이 $\mathrm{C_1}$인 부채꼴 $\mathrm{C_1D_1B_2}$를 그린다. 점 $\mathrm{B_2}$에서 선분 $\mathrm{C_1D_1}$에 내린 수선의 발을 $\mathrm{A_2}$, 선분 $\mathrm{C_1B_2}$의 중점을 $\mathrm{C_2}$라 하자. 두 선분 $\mathrm{B_1B_2}$, $\mathrm{B_1D_1}$과 호 $\mathrm{D_1B_2}$로 둘러싸인 영역과 삼각형 $\mathrm{C_1A_2C_2}$의 내부에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

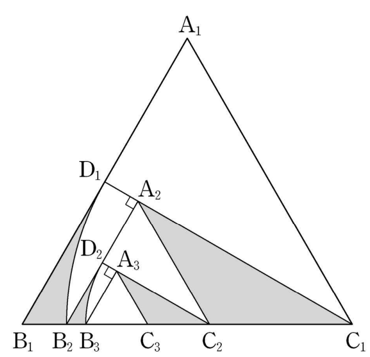
그림 R_1에서 선분 $\mathrm{A_2B_2}$의 중점을 $\mathrm{D_2}$라 하고, 선분 $\mathrm{B_2C_2}$ 위의 $\overline{\mathrm{C_2D_2}}=\overline{\mathrm{C_2B_3}}$인 점 $\mathrm{B_3}$에 대하여 중심이 $\mathrm{C_2}$인 부채꼴 $\mathrm{C_2D_2B_3}$을 그린다. 점 $\mathrm{B_3}$에서 선분 $\mathrm{C_2D_2}$에 내린 수선의 발을 $\mathrm{A_3}$, 선분 $\mathrm{C_2B_3}$의 중점을 $\mathrm{C_3}$이라 하자. 두 선분 $\mathrm{B_2B_3}$, $\mathrm{B_2D_2}$와 호 $\mathrm{D_2B_3}$으로 둘러싸인 영역과 삼각형 $\mathrm{C_2A_3C_3}$의 내부에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은?

R_1



R_2



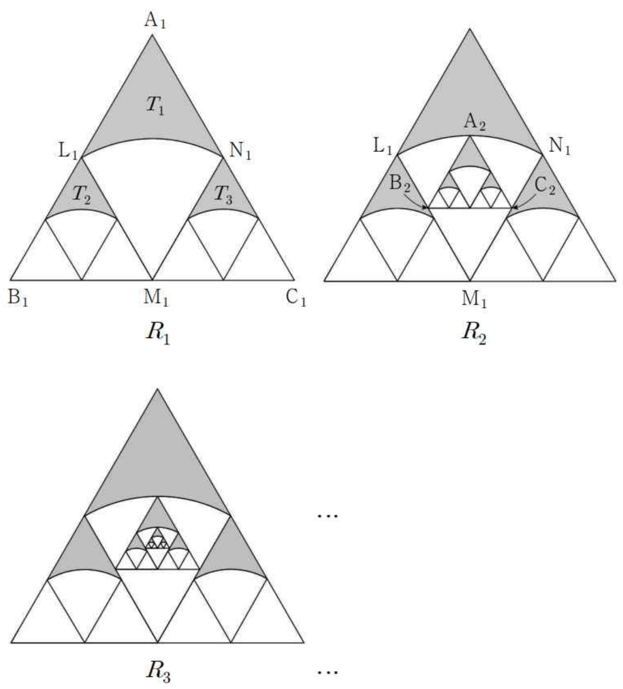
⋮ ⋮

① $\dfrac{11\sqrt{3}-4\pi}{56}$ ② $\dfrac{11\sqrt{3}-4\pi}{52}$ ③ $\dfrac{15\sqrt{3}-6\pi}{56}$

④ $\dfrac{15\sqrt{3}-6\pi}{52}$ ⑤ $\dfrac{15\sqrt{3}-4\pi}{52}$

[출처] 2017 모의_공공 교육청 고3 07월 18

31. 그림과 같이 한 변의 길이가 2인 정삼각형 $\mathrm{A_1B_1C_1}$ 이 있다. 세 선분 $\mathrm{A_1B_1}$, $\mathrm{B_1C_1}$, $\mathrm{C_1A_1}$ 의 중점을 각각 $\mathrm{L_1}$, $\mathrm{M_1}$, $\mathrm{N_1}$ 이라 하고, 중심이 $\mathrm{M_1}$, 반지름의 길이가 $\overline{\mathrm{M_1N_1}}$ 이고 중심각의 크기가 60° 인 부채꼴 $\mathrm{M_1N_1L_1}$ 을 그린 후 부채꼴 $\mathrm{M_1N_1L_1}$ 의 호 $\mathrm{N_1L_1}$ 과 두 선분 $\mathrm{A_1L_1}$, $\mathrm{A_1N_1}$ 로 둘러싸인 부분인 △모양의 도형을 T_1 이라 하자. 두 정삼각형 $\mathrm{L_1B_1M_1}$ 과 $\mathrm{N_1M_1C_1}$ 에 도형 T_1 을 얻은 것과 같은 방법으로 만들어지는 각각의 부채꼴의 호와 두 선분으로 둘러싸인 부분인 △모양의 도형을 각각 T_2, T_3 이라 하자. 정삼각형 $\mathrm{A_1B_1C_1}$ 에서 세 도형 T_1, T_2, T_3 으로 이루어진 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1 이라 하자. 그림 R_1 에서 부채꼴 $\mathrm{M_1N_1L_1}$ 의 호 $\mathrm{N_1L_1}$ 을 이등분하는 점을 $\mathrm{A_2}$ 라 할 때, 부채꼴 $\mathrm{M_1N_1L_1}$ 에 내접하는 정삼각형 $\mathrm{A_2B_2C_2}$ 를 그리고 그림 R_1 을 얻은 것과 같은 방법으로 만들어지는 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_2 라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n 번째 얻은 그림 R_n 에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n 이라 할 때, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ 의 값은?



① $\dfrac{3(3\sqrt{3}-\pi)}{11}$　② $\dfrac{13(3\sqrt{3}-\pi)}{44}$

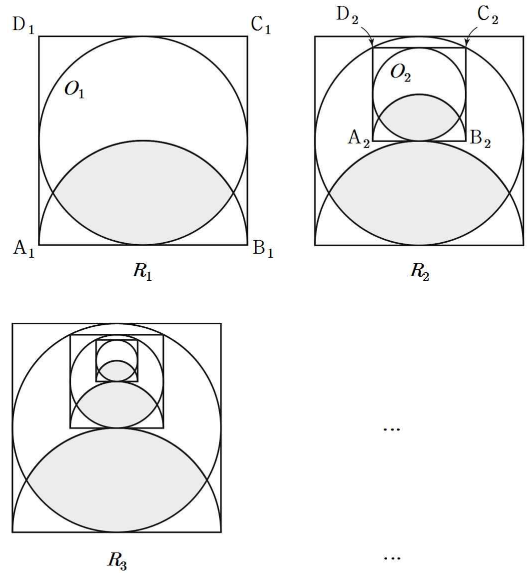
③ $\dfrac{7(3\sqrt{3}-\pi)}{22}$　④ $\dfrac{15(3\sqrt{3}-\pi)}{44}$

⑤ $\dfrac{4(3\sqrt{3}-\pi)}{11}$

[출처] 2017 모의_공공 교육청 고2 11월 16

[출처] 2017 모의_공공 교육청 고2 11월 19

32. 그림과 같이 한 변의 길이가 4인 정사각형 $\mathrm{A_1B_1C_1D_1}$ 이 있다. 정사각형 $\mathrm{A_1B_1C_1D_1}$ 에 내접하는 원 O_1 과 선분 $\mathrm{A_1B_1}$ 을 지름으로 하는 원의 위쪽 반원을 그린다. 원 O_1 의 내부와 선분 $\mathrm{A_1B_1}$ 을 지름으로 하는 원의 위쪽 반원의 내부의 공통부분인 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1 이라 하자. 그림 R_1 에서 원 O_1 의 내부의 색칠하지 않은 부분인 모양의 도형 내부에 원 O_1 의 중심을 지나고 선분 $\mathrm{A_1B_1}$ 에 평행한 직선 위의 두 점 $\mathrm{A_2}$, $\mathrm{B_2}$ 와 원 O_1 위의 두 점 $\mathrm{C_2}$, $\mathrm{D_2}$ 를 꼭짓점으로 하는 정사각형 $\mathrm{A_2B_2C_2D_2}$ 를 그린다. 정사각형 $\mathrm{A_2B_2C_2D_2}$ 에 내접하는 원 O_2 와 선분 $\mathrm{A_2B_2}$ 를 지름으로 하는 원의 위쪽 반원을 그린다. 원 O_2 의 내부와 선분 $\mathrm{A_2B_2}$ 를 지름으로 하는 원의 위쪽 반원의 내부의 공통부분인 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_2 라 하자. 그림 R_2 에서 원 O_2 의 내부의 색칠하지 않은 부분인 모양의 도형 내부에 그림 R_1 에서 그림 R_2 를 얻는 것과 같은 방법으로 만들어지는 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_3 이라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n 번째 얻은 그림 R_n 에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n 이라 할 때, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ 의 값은?



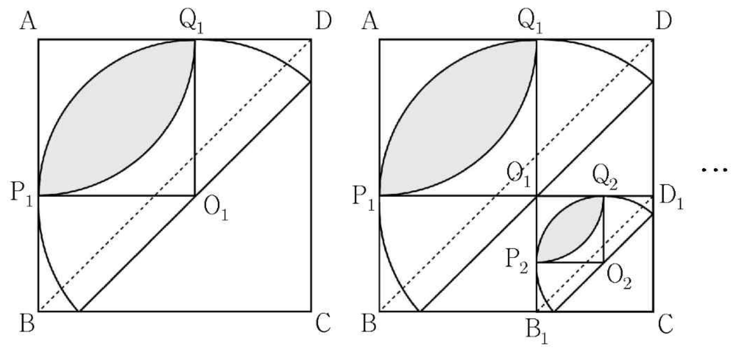
① $\dfrac{9}{4}\left(\dfrac{4}{3}\pi-\sqrt{3}\right)$　② $\dfrac{5}{2}\left(\dfrac{4}{3}\pi-\sqrt{3}\right)$

③ $\dfrac{7}{2}\left(\dfrac{4}{3}\pi-\sqrt{3}\right)$　④ $\dfrac{4}{3}\left(\dfrac{8}{3}\pi-\sqrt{3}\right)$

⑤ $\dfrac{7}{4}\left(\dfrac{8}{3}\pi-\sqrt{3}\right)$

[출처] 2017 모의_공공 교육청 고2 06월 20

33. 그림과 같이 한 변의 길이가 4인 정사각형 ABCD의 내부에 지름의 양 끝점이 각각 변 BC, 변 CD 위에 있고, 지름이 선분 BD와 평행한 반원을 내접하게 그린다. 이 반원의 중심을 O_1이라 하고 반원이 두 변 AB, AD와 만나는 점을 각각 P_1, Q_1이라 하자. 중심이 A, 반지름이 선분 AP_1, 중심각이 $\angle P_1AQ_1$인 부채꼴의 내부와 이 반원의 내부의 공통부분인  모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자. 그림 R_1에 있는 점 O_1에서 두 변 BC, CD 위에 내린 수선의 발을 각각 B_1, D_1이라 하고 네 점 O_1, B_1, C, D_1을 꼭짓점으로 하는 정사각형 $O_1B_1CD_1$을 그린다. 정사각형 $O_1B_1CD_1$에 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 만들어지는  모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n = (p\sqrt{2}-q)(\pi-2)$이다. 두 유리수 p, q에 대하여 $p+q$의 값은?



R_1　　　R_2　　　…

① 15　② 16　③ 17
④ 18　⑤ 19

[출처] 2017 모의_공공 평가원 고3 06월 18

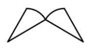
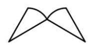
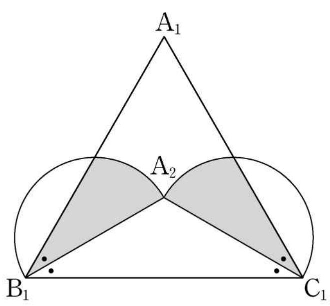
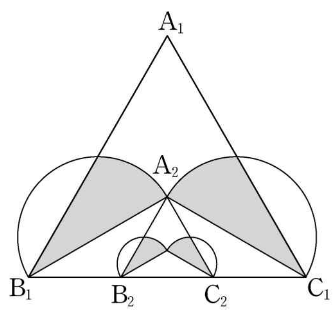
34. 한 변의 길이가 $2\sqrt{3}$인 정삼각형 $A_1B_1C_1$이 있다. 그림과 같이 $\angle A_1B_1C_1$의 이등분선과 $\angle A_1C_1B_1$의 이등분선이 만나는 점을 A_2라 하자. 두 선분 B_1A_2, C_1A_2를 각각 지름으로 하는 반원의 내부와 정삼각형 $A_1B_1C_1$의 내부의 공통부분인  모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

그림 R_1에서 점 A_2를 지나고 선분 A_1B_1에 평행한 직선이 선분 B_1C_1과 만나는 점을 B_2, 점 A_2를 지나고 선분 A_1C_1에 평행한 직선이 선분 B_1C_1과 만나는 점을 C_2라 하자. 그림 R_1에 정삼각형 $A_2B_2C_2$를 그리고, 그림 R_1을 얻는 것과 같은 방법으로 정삼각형 $A_2B_2C_2$의 내부에  모양의 도형을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

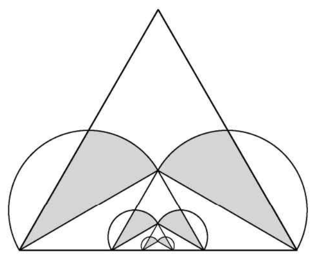
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은?



R_1



R_2



R_3

…

① $\dfrac{9\sqrt{3}+6\pi}{16}$　② $\dfrac{3\sqrt{3}+4\pi}{8}$　③ $\dfrac{9\sqrt{3}+8\pi}{16}$
④ $\dfrac{3\sqrt{3}+2\pi}{4}$　⑤ $\dfrac{3\sqrt{3}+6\pi}{8}$

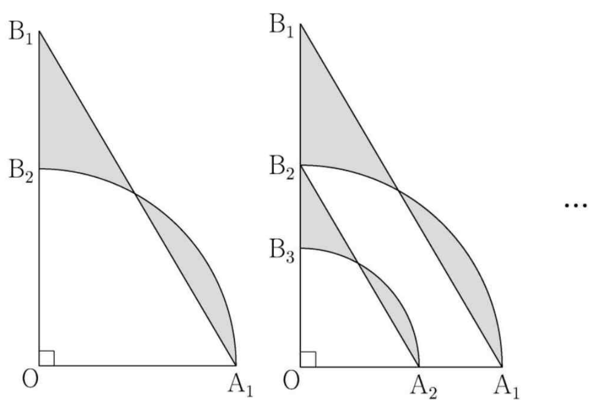
[출처] 2018 모의_공공 평가원 고3 11월 16

[출처] 2020 일반_시중교재 EBS한국교육방송공사 EBS교육방송 편집부 수능특강 대표 기출 문제

35. 그림과 같이 $\overline{OA_1}=4$, $\overline{OB_1}=4\sqrt{3}$인 직각삼각형 OA_1B_1이 있다. 중심이 O이고 반지름의 길이가 $\overline{OA_1}$인 원이 선분 OB_1과 만나는 점을 B_2라 하자. 삼각형 OA_1B_1의 내부와 부채꼴 OA_1B_2의 내부에서 공통된 부분을 제외한 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

그림 R_1에서 점 B_2를 지나고 선분 A_1B_1에 평행한 직선이 선분 OA_1과 만나는 점을 A_2, 중심이 O이고 반지름의 길이가 $\overline{OA_2}$인 원이 선분 OB_2와 만나는 점을 B_3이라 하자. 삼각형 OA_2B_2의 내부와 부채꼴 OA_2B_3의 내부에서 공통된 부분을 제외한 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은?



R_1 R_2 …

① $\frac{3}{2}\pi$ ② $\frac{5}{3}\pi$ ③ $\frac{11}{6}\pi$

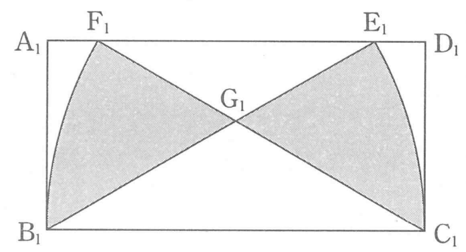
④ 2π ⑤ $\frac{13}{6}\pi$

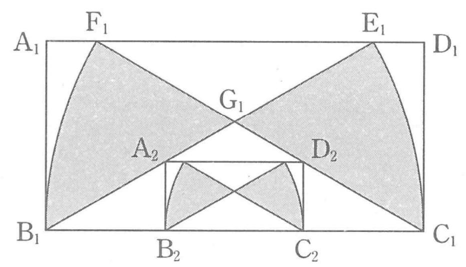
[출처] 2018 모의_공공 평가원 고3 06월 18

[출처] 2019 일반_시중교재 EBS한국교육방송공사 EBS교육방송 편집부 수능완성 05 수열의 극한 유형9 필수유형

36. 그림과 같이 $\overline{A_1B_1}=1$, $\overline{A_1D_1}=2$인 직사각형 $A_1B_1C_1D_1$이 있다. 선분 A_1D_1 위의 $\overline{B_1C_1}=\overline{B_1E_1}$, $\overline{C_1B_1}=\overline{C_1F_1}$인 두 점 E_1, F_1에 대하여 중심이 B_1인 부채꼴 $B_1E_1C_1$과 중심이 C_1인 부채꼴 $C_1F_1B_1$을 각각 직사각형 $A_1B_1C_1D_1$ 내부에 그리고, 선분 B_1E_1과 C_1F_1의 교점을 G_1이라 하자. 두 선분 G_1F_1, G_1B_1과 호 F_1B_1로 둘러싸인 부분과 두 선분 G_1E_1, G_1C_1과 호 E_1C_1로 둘러싸인 부분인 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

그림 R_1에서 선분 B_1G_1 위의 점 A_2, 선분 C_1G_1 위의 점 D_2와 선분 B_1C_1 위의 두 점 B_2, C_2를 꼭짓점으로 하고 $\overline{A_2B_2}:\overline{A_2D_2}=1:2$인 직사각형 $A_2B_2C_2D_2$를 그리고, 그림 R_1을 얻는 것과 같은 방법으로 직사각형 $A_2B_2C_2D_2$ 내부에 모양의 도형을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은?

R_1


R_2


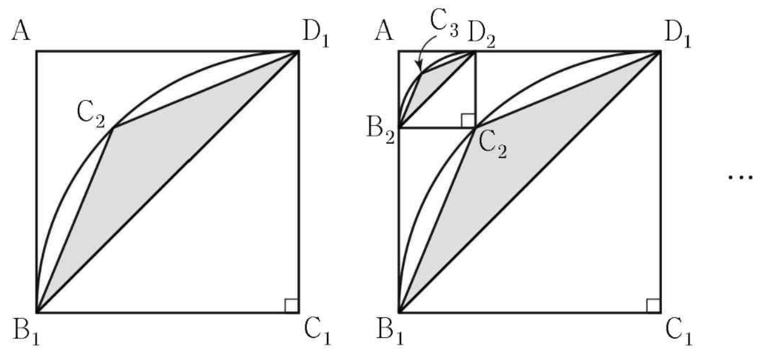
⋮ ⋮

① $\frac{3\sqrt{3}\pi-7}{9}$ ② $\frac{4\sqrt{3}\pi-12}{9}$ ③ $\frac{3\sqrt{3}\pi-5}{9}$

④ $\frac{4\sqrt{3}\pi-10}{9}$ ⑤ $\frac{4\sqrt{3}\pi-8}{9}$

[출처] 2018 모의_공공 교육청 고2 11월 20

37. 그림과 같이 한 변의 길이가 2인 정사각형 $AB_1C_1D_1$ 안에 꼭짓점 C_1을 중심으로 하고 선분 C_1B_1을 반지름으로 하는 사분원을 그린다. 호 B_1D_1을 이등분하는 점을 C_2라 하고 삼각형 $C_2B_1D_1$에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자. 그림 R_1에서 선분 AB_1 위의 점 B_2, 선분 AD_1 위의 점 D_2와 두 점 A, C_2를 꼭짓점으로 하는 정사각형 $AB_2C_2D_2$를 그리고, 정사각형 $AB_2C_2D_2$ 안에 꼭짓점 C_2를 중심으로 하고 선분 C_2B_2를 반지름으로 하는 사분원을 그린다. 호 B_2D_2를 이등분하는 점을 C_3이라 하고 삼각형 $C_3B_2D_2$에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은?



R_1 R_2 …

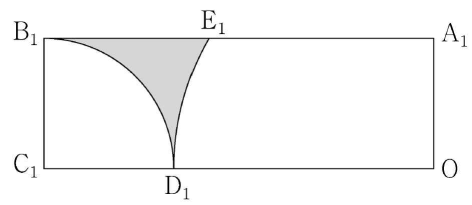
① $\dfrac{12-5\sqrt{2}}{7}$ ② $\dfrac{11-4\sqrt{2}}{7}$ ③ $\dfrac{10-3\sqrt{2}}{7}$

④ $\dfrac{12-4\sqrt{2}}{7}$ ⑤ $\dfrac{12-3\sqrt{2}}{7}$

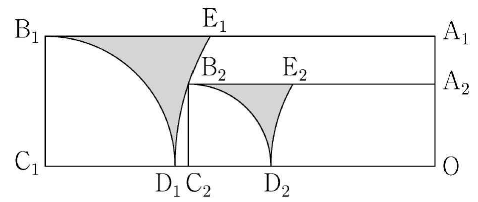
[출처] 2018 모의_공공 평가원 고3 09월 19

38. 그림과 같이 $\overline{A_1B_1}=3$, $\overline{B_1C_1}=1$인 직사각형 $OA_1B_1C_1$이 있다. 중심이 C_1이고 반지름의 길이가 $\overline{B_1C_1}$인 원과 선분 OC_1의 교점을 D_1, 중심이 O이고 반지름의 길이가 $\overline{OD_1}$인 원과 선분 A_1B_1의 교점을 E_1이라 하자. 직사각형 $OA_1B_1C_1$에 호 B_1D_1, 호 D_1E_1, 선분 B_1E_1로 둘러싸인 ◸모양의 도형을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자. 그림 R_1에 선분 OA_1 위의 점 A_2와 호 D_1E_1 위의 점 B_2, 선분 OD_1 위의 점 C_2와 점 O를 꼭짓점으로 하고, $\overline{A_2B_2}:\overline{B_2C_2}=3:1$인 직사각형 $OA_2B_2C_2$를 그리고, 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 직사각형 $OA_2B_2C_2$에 ◸모양의 도형을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은?

R_1



R_2



⋮ ⋮

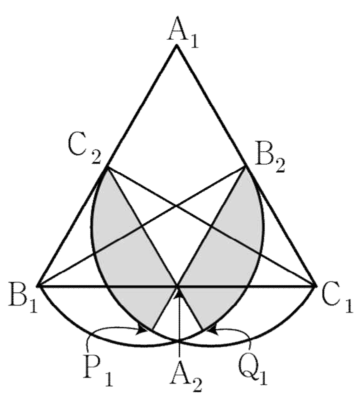
① $4-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}-\dfrac{7}{9}\pi$ ② $5-\dfrac{5\sqrt{3}}{6}-\dfrac{35}{36}\pi$

③ $6-\sqrt{3}-\dfrac{7}{6}\pi$ ④ $7-\dfrac{7\sqrt{3}}{6}-\dfrac{49}{36}\pi$

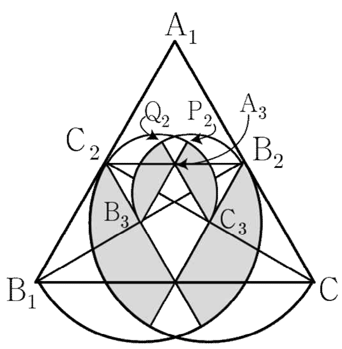
⑤ $8-\dfrac{4\sqrt{3}}{3}-\dfrac{14}{9}\pi$

[출처] 2018 모의_공공 교육청 고3 07월 19

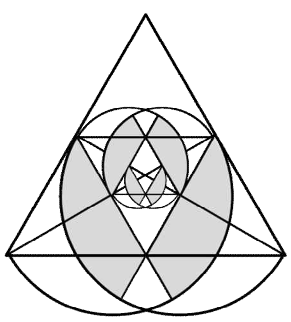
39. 그림과 같이 한 변의 길이가 4인 정삼각형 $A_1B_1C_1$이 있다. 세 선분 B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1의 중점을 각각 A_2, B_2, C_2라 하자. 선분 C_1C_2를 지름으로 하는 반원의 호와 선분 B_2A_2의 연장선이 만나는 점을 P_1, 선분 B_1B_2를 지름으로 하는 반원의 호와 선분 C_2A_2의 연장선이 만나는 점을 Q_1이라 하자. 두 선분 C_2A_2, A_2P_1과 호 P_1C_2로 둘러싸인 영역과 두 선분 B_2A_2, A_2Q_1과 호 Q_1B_2로 둘러싸인 영역에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자. 그림 R_1에서 정삼각형 $A_2B_2C_2$의 세 변 B_2C_2, C_2A_2, A_2B_2의 중점을 각각 A_3, B_3, C_3이라 하자. 선분 C_2C_3을 지름으로 하는 반원의 호와 선분 B_3A_3의 연장선이 만나는 점을 P_2, 선분 B_2B_3을 지름으로 하는 반원의 호와 선분 C_3A_3의 연장선이 만나는 점을 Q_2라 하자. 두 선분 C_3A_3, A_3P_2와 호 P_2C_3으로 둘러싸인 영역과 두 선분 B_3A_3, A_3Q_2와 호 Q_2B_3으로 둘러싸인 영역에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은?



R_1



R_2



R_3

…

…

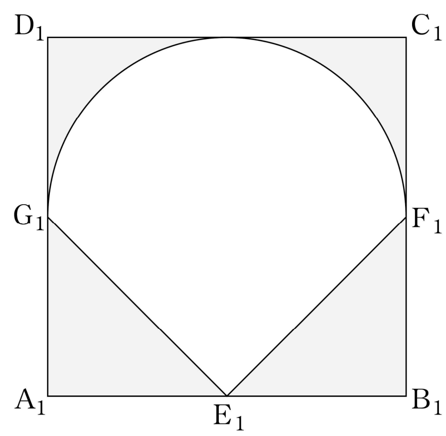
① $\frac{6\pi-4\sqrt{3}}{3}$　② $\frac{6\pi-2\sqrt{3}}{3}$　③ $\frac{6\pi-\sqrt{3}}{3}$

④ $\frac{8\pi-4\sqrt{3}}{3}$　⑤ $\frac{8\pi-2\sqrt{3}}{3}$

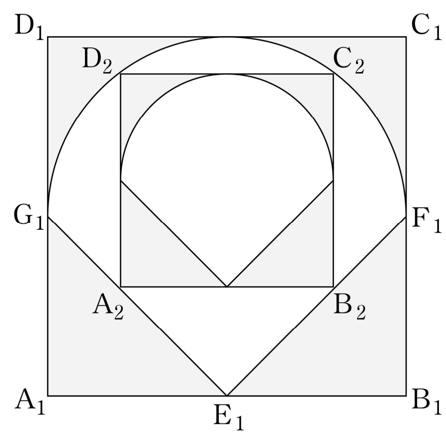
[출처] 2018 모의_공공 교육청 고3 10월 19

40. 그림과 같이 한 변의 길이가 2인 정사각형 $A_1B_1C_1D_1$이 있다. 세 변 A_1B_1, B_1C_1, D_1A_1의 중점을 각각 E_1, F_1, G_1이라 하자. 선분 G_1F_1을 지름으로 하고 선분 D_1C_1에 접하는 반원의 호 G_1F_1과 두 선분 G_1E_1, E_1F_1로 둘러싸인 모양의 도형의 외부와 정사각형 $A_1B_1C_1D_1$의 내부의 공통부분을 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자. 그림 R_1에서 선분 G_1E_1 위의 점 A_2, 선분 E_1F_1 위의 점 B_2와 호 G_1F_1 위의 두 점 C_2, D_2를 꼭짓점으로 하고 선분 A_2B_2가 선분 A_1B_1과 평행한 정사각형 $A_2B_2C_2D_2$를 그린다. 정사각형$A_2B_2C_2D_2$에 그림 R_1을 얻는 것과 같은 방법으로 그린 모양의 도형의 외부와 정사각형 $A_2B_2C_2D_2$의 내부의 공통부분을 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은?

R_1



R_2



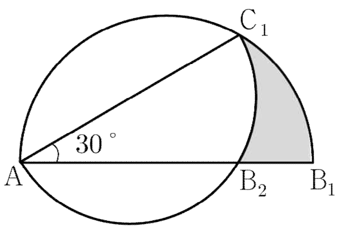
⋮　⋮

① $\frac{25(6-\pi)}{42}$　② $\frac{25(6-\pi)}{32}$　③ $\frac{25(6-\pi)}{24}$

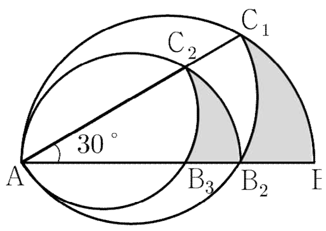
④ $\frac{25(6-\pi)}{21}$　⑤ $\frac{5(6-\pi)}{4}$

[출처] 2018 모의_공공 교육청 고2 09월 20

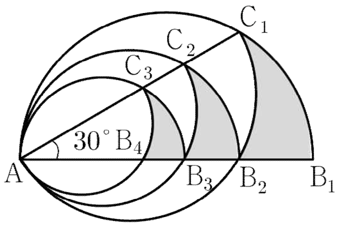
41. 그림과 같이 길이가 8인 선분 AB_1을 지름으로 하는 반원을 그리고 호 B_1A 위에 $\angle B_1AC_1 = 30^\circ$가 되도록 점 C_1을 잡는다. 선분 AC_1을 지름으로 하는 반원이 선분 AB_1과 만나는 점 중 점 A가 아닌 점을 B_2라 할 때, 선분 B_2B_1, 호 B_1C_1과 호 C_1B_2로 둘러싸인 도형의 내부를 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자. 그림 R_1에서 선분 AB_2를 지름으로 하는 반원을 그리고 호 B_2A 위에 $\angle B_2AC_2 = 30^\circ$가 되도록 점 C_2를 잡는다. 선분 AC_2를 지름으로 하는 반원이 선분 AB_2와 만나는 점 중 점 A가 아닌 점을 B_3이라 할 때, 선분 B_3B_2, 호 B_2C_2와 호 C_2B_3으로 둘러싸인 도형의 내부를 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림을 R_n이라 할 때, 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 하자. $\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{q}{p}(2\pi + 3\sqrt{3})$일 때, $p+q$의 값은? (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)



R_1



R_2



R_3

⋯

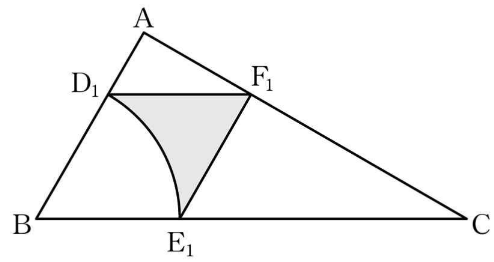
⋯

① 31 ② 33 ③ 35
④ 37 ⑤ 39

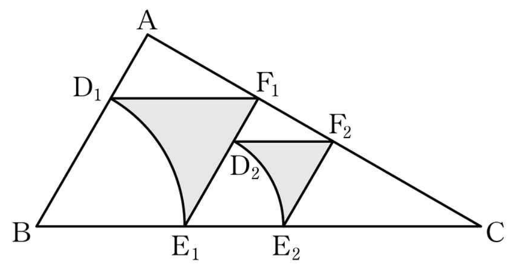
[출처] 2019 모의_공공 교육청 고3 10월 19

42. 그림과 같이 $\overline{AB} = 2$, $\overline{BC} = 4$이고 $\angle ABC = 60^\circ$인 삼각형 ABC가 있다. 사각형 $D_1BE_1F_1$이 마름모가 되도록 세 선분 AB, BC, CA 위에 각각 점 D_1, E_1, F_1을 잡고, 마름모 $D_1BE_1F_1$의 내부와 중심이 B인 부채꼴 BE_1D_1의 외부의 공통부분에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자. 그림 R_1에서 사각형 $D_2E_1E_2F_2$가 마름모가 되도록 세 선분 F_1E_1, E_1C, CF_1 위에 각각 점 D_2, E_2, F_2를 잡고, 마름모 $D_2E_1E_2F_2$의 내부와 중심이 E_1인 부채꼴 $E_1E_2D_2$의 외부의 공통부분에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은?

R_1



R_2



⋮ ⋮

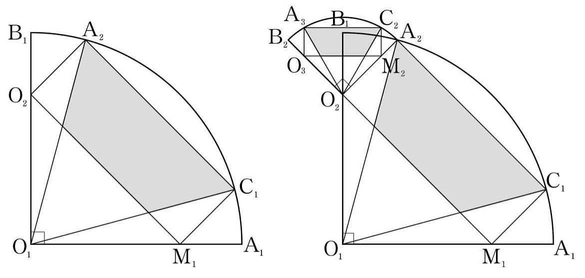
① $\frac{4(3\sqrt{3}-\pi)}{15}$ ② $\frac{4(3\sqrt{3}-\pi)}{9}$

③ $\frac{8(3\sqrt{3}-\pi)}{15}$ ④ $\frac{2(3\sqrt{3}-\pi)}{3}$

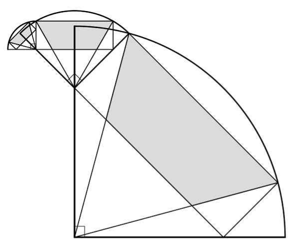
⑤ $\frac{8(3\sqrt{3}-\pi)}{9}$

[출처] 2019 모의_공공 교육청 고3 03월 19

43. 그림과 같이 중심이 O_1, 반지름의 길이가 2이고 중심각의 크기가 $90°$인 부채꼴 $O_1A_1B_1$에서 두 선분 O_1A_1, O_1B_1위에 두 점 M_1, O_2를 각각 $\overline{O_1M_1}=\frac{\sqrt{2}}{2}\overline{O_1A_1}$, $\overline{O_1O_2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\overline{O_1B_1}$이 되도록 정하자. 두 점 M_1, O_2와 호 A_1B_1 위의 두 점 C_1, A_2를 꼭짓점으로 하는 직사각형 $O_2M_1C_1A_2$를 그리고, 직사각형 $O_2M_1C_1A_2$와 삼각형 $O_1C_1A_2$의 내부의 공통부분에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자. 그림 R_1에 중심이 O_2, 반지름의 길이가 $\overline{O_2A_2}$이고 중심각의 크기가 $90°$인 부채꼴 $O_2A_2B_2$를 점 B_2가 부채꼴 $O_1A_1B_1$의 외부에 있도록 그리고, 두 선분 O_2A_2, O_2B_2 위에 두 점 M_2, O_3을 각각 $\overline{O_2M_2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\overline{O_2A_2}$, $\overline{O_2O_3}=\frac{\sqrt{2}}{2}\overline{O_2B_2}$가 되도록 정하자. 두 점 M_2, O_3과 호 A_2B_2위의 두 점 C_2, A_3을 꼭짓점으로 하는 직사각형 $O_3M_2C_2A_3$을 그리고, 직사각형 $O_3M_2C_2A_3$과 삼각형 $O_2C_2A_3$의 내부의 공통부분에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}S_n$의 값은?



R_1 R_2



⋯

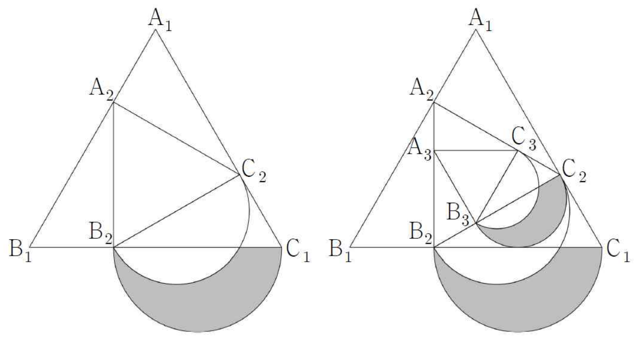
R_3 ⋯

① $\frac{7}{6}$ ② $\frac{4}{3}$ ③ $\frac{3}{2}$

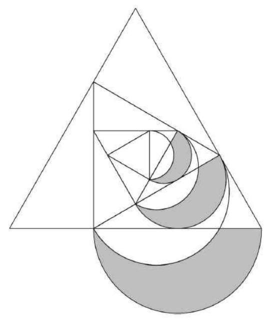
④ $\frac{5}{3}$ ⑤ $\frac{11}{6}$

[출처] 2019 모의_공공 교육청 고3 07월 19

44. 그림과 같이 한 변의 길이가 3인 정삼각형 $A_1B_1C_1$이 있다. 세 선분 A_1B_1, B_1C_1, C_1A_1을 $1:2$로 내분하는 점을 각각 A_2, B_2, C_2라 하자. 선분 B_2C_1을 지름으로 하는 반원의 내부와 선분 B_2C_2를 지름으로 하는 반원의 외부의 공통부분인 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자. 그림 R_1에서 세 선분 A_2B_2, B_2C_2, C_2A_2를 $1:2$로 내분하는 점을 각각 A_3, B_3, C_3이라 하자. 선분 B_3C_2를 지름으로 하는 반원의 내부와 선분 B_3C_3을 지름으로 하는 반원의 외부의 공통부분인 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}S_n$의 값은?



R_1 R_2



⋯

R_3 ⋯

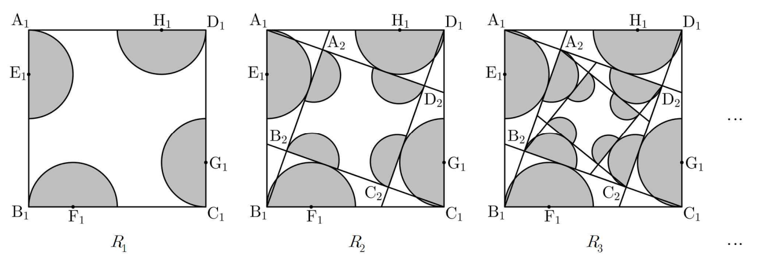
① $\frac{11\pi+8\sqrt{3}}{32}$ ② $\frac{11\pi+9\sqrt{3}}{32}$

③ $\frac{3\pi+2\sqrt{3}}{8}$ ④ $\frac{12\pi+9\sqrt{3}}{32}$

⑤ $\frac{3\pi+3\sqrt{3}}{8}$

[출처] 2019 모의_공공 사관학교 고3 07월 18

45. 그림과 같이 한 변의 길이가 4인 정사각형 $\mathrm{A_1B_1C_1D_1}$이 있다. 4개의 선분 $\mathrm{A_1B_1}$, $\mathrm{B_1C_1}$, $\mathrm{C_1D_1}$, $\mathrm{D_1A_1}$을 $1:3$로 내분하는 점을 각각 $\mathrm{E_1}$, $\mathrm{F_1}$, $\mathrm{G_1}$, $\mathrm{H_1}$이라 하고, 정사각형 $\mathrm{A_1B_1C_1D_1}$의 내부에 점 $\mathrm{E_1}$, $\mathrm{F_1}$, $\mathrm{G_1}$, $\mathrm{H_1}$ 각각을 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\frac{1}{4}\overline{\mathrm{A_1B_1}}$인 4개의 반원을 그린 후 이 4개의 반원의 내부에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자. 그림 R_1에서 점 $\mathrm{A_1}$을 지나고 중심이 $\mathrm{H_1}$인 색칠된 반원의 호에 접하는 직선과 점 $\mathrm{B_1}$을 지나고 중심이 $\mathrm{E_1}$인 색칠된 반원의 호에 접하는 직선의 교점을 $\mathrm{A_2}$, 점 $\mathrm{B_1}$을 지나고 중심이 $\mathrm{E_1}$인 색칠된 반원의 호에 접하는 직선과 점 $\mathrm{C_1}$을 지나고 중심이 $\mathrm{F_1}$인 색칠된 반원의 호에 접하는 직선의 교점을 $\mathrm{B_2}$, 점 $\mathrm{C_1}$을 지나고 중심이 $\mathrm{F_1}$인 색칠된 반원의 호에 접하는 직선과 점 $\mathrm{D_1}$을 지나고 중심이 $\mathrm{G_1}$인 색칠된 반원의 호에 접하는 직선의 교점을 $\mathrm{C_2}$, 점 $\mathrm{D_1}$을 지나고 중심이 $\mathrm{G_1}$인 색칠된 반원의 호에 접하는 직선과 점 $\mathrm{A_1}$을 지나고 중심이 $\mathrm{H_1}$인 색칠된 반원의 호에 접하는 직선의 교점을 $\mathrm{D_2}$라 하자. 정사각형 $\mathrm{A_2B_2C_2D_2}$의 내부에 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 4개의 반원을 그리고 이 4개의 반원의 내부에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은?



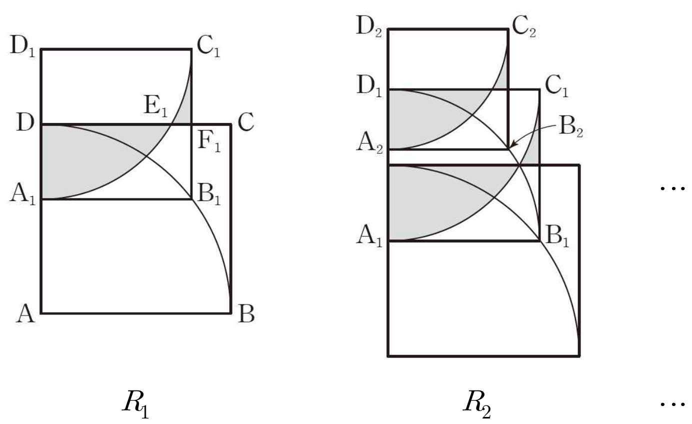
① $\dfrac{9\sqrt{2}\pi}{4}$ ② $\dfrac{19\sqrt{2}\pi}{8}$ ③ $\dfrac{5\sqrt{2}\pi}{2}$

④ $\dfrac{21\sqrt{2}\pi}{8}$ ⑤ $\dfrac{11\sqrt{2}\pi}{4}$

[출처] 2019 모의_공공 평가원 고3 11월 18

[출처] 2021 일반_시중교재 EBS한국교육방송공사 EBS교육방송 편집부 수능특강 대표 기출 문제

46. 그림과 같이 한 변의 길이가 5인 정사각형 ABCD에 중심이 A이고 중심각의 크기가 $90°$인 부채꼴 ABD를 그린다. 선분 AD를 $3:2$로 내분하는 점을 $\mathrm{A_1}$, 점 $\mathrm{A_1}$을 지나고 선분 AB에 평행한 직선이 호 BD와 만나는 점을 $\mathrm{B_1}$이라 하자. 선분 $\mathrm{A_1B_1}$을 한 변으로 하고 선분 DC와 만나도록 정사각형 $\mathrm{A_1B_1C_1D_1}$을 그린 후, 중심이 $\mathrm{D_1}$이고 중심각의 크기가 $90°$인 부채꼴 $\mathrm{D_1A_1C_1}$을 그린다. 선분 DC가 호 $\mathrm{A_1C_1}$, 선분 $\mathrm{B_1C_1}$과 만나는 점을 각각 $\mathrm{E_1}$, $\mathrm{F_1}$이라 하고, 두 선분 $\mathrm{DA_1}$, $\mathrm{DE_1}$과 호 $\mathrm{A_1E_1}$로 둘러싸인 부분과 두 선분 $\mathrm{E_1F_1}$, $\mathrm{F_1C_1}$과 호 $\mathrm{E_1C_1}$로 둘러싸인 부분인  모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.
그림 R_1에서 정사각형 $\mathrm{A_1B_1C_1D_1}$에 중심이 $\mathrm{A_1}$이고 중심각의 크기가 $90°$인 부채꼴 $\mathrm{A_1B_1D_1}$을 그린다. 선분 $\mathrm{A_1D_1}$을 $3:2$로 내분하는 점을 $\mathrm{A_2}$, 점 $\mathrm{A_2}$를 지나고 선분 $\mathrm{A_1B_1}$에 평행한 직선이 호 $\mathrm{B_1D_1}$과 만나는 점을 $\mathrm{B_2}$라 하자. 선분 $\mathrm{A_2B_2}$를 한 변으로 하고 선분 $\mathrm{D_1C_1}$과 만나도록 정사각형 $\mathrm{A_2B_2C_2D_2}$를 그린 후, 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 정사각형 $\mathrm{A_2B_2C_2D_2}$에  모양의 도형을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은?



① $\dfrac{50}{3}\left(3-\sqrt{3}+\dfrac{\pi}{6}\right)$ ② $\dfrac{100}{9}\left(3-\sqrt{3}+\dfrac{\pi}{3}\right)$

③ $\dfrac{50}{3}\left(2-\sqrt{3}+\dfrac{\pi}{3}\right)$ ④ $\dfrac{100}{9}\left(3-\sqrt{3}+\dfrac{\pi}{6}\right)$

⑤ $\dfrac{100}{9}\left(2-\sqrt{3}+\dfrac{\pi}{3}\right)$

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 10월 18

47. 그림과 같이 길이가 4인 선분 A_1B_1을 지름으로 하는 반원 O_1의 호 A_1B_1을 4등분하는 점을 점 A_1에서 가까운 순서대로 각각 C_1, D_1, E_1이라 하고, 두 점 C_1, E_1에서 선분 A_1B_1에 내린 수선의 발을 각각 A_2, B_2라 하자.

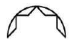
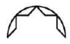
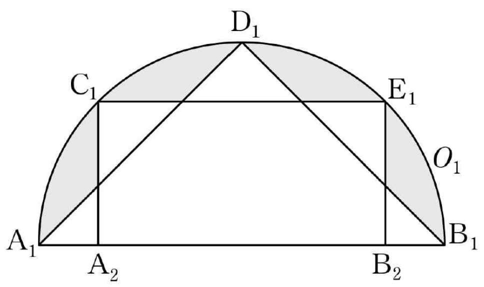
사각형 $C_1A_2B_2E_1$의 외부와 삼각형 $D_1A_1B_1$의 외부의 공통부분 중 반원 O_1의 내부에 있는 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

그림 R_1에서 선분 A_2B_2를 지름으로 하는 반원 O_2를 반원 O_1의 내부에 그리고, 반원 O_2의 호 A_2B_2를 4등분하는 점을 점 A_2에서 가까운 순서대로 각각 C_2, D_2, E_2라 하고, 두 점 C_2, E_2에서 선분 A_2B_2에 내린 수선의 발을 각각 A_3, B_3이라 하자.

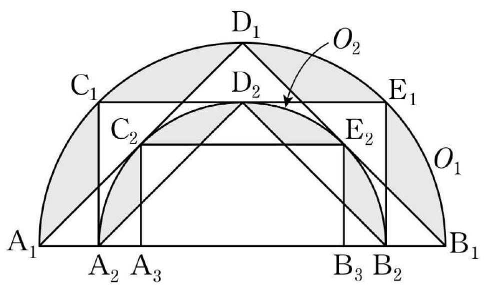
사각형 $C_2A_3B_3E_2$의 외부와 삼각형 $D_2A_2B_2$의 외부의 공통부분 중 반원 O_2의 내부에 있는 모양의 도형에 색칠을 하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은?

R_1



R_2



⋮ ⋮

① $4\pi+4\sqrt{2}-16$ ② $4\pi+16\sqrt{2}-32$

③ $4\pi+8\sqrt{2}-20$ ④ $2\pi+16\sqrt{2}-24$

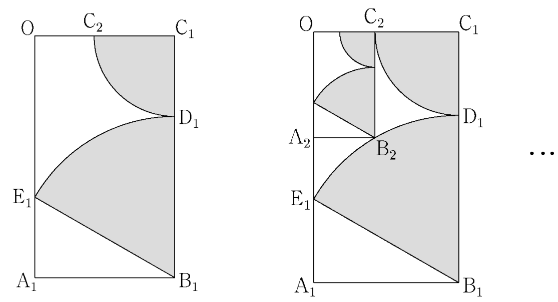
⑤ $2\pi+8\sqrt{2}-12$

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 예비 미적분 26

48. 그림과 같이 $\overline{OA_1}=\sqrt{3}$, $\overline{OC_1}=1$인 직사각형 $OA_1B_1C_1$이 있다. 선분 B_1C_1 위의 $\overline{B_1D_1}=2\overline{C_1D_1}$인 점 D_1에 대하여 중심이 B_1이고 반지름의 길이가 $\overline{B_1D_1}$인 원과 선분 OA_1의 교점을 E_1, 중심이 C_1이고 반지름의 길이가 $\overline{C_1D_1}$인 원과 선분 OC_1의 교점을 C_2라 하자. 부채꼴 $B_1D_1E_1$의 내부와 부채꼴 $C_1C_2D_1$의 내부로 이루어진 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

그림 R_1에서 선분 OA_1 위의 점 A_2, 호 D_1E_1 위의 점 B_2와 점 C_2, 점 O를 꼭짓점으로 하는 직사각형 $OA_2B_2C_2$를 그리고, 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 직사각형 $OA_2B_2C_2$에 모양의 도형을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은?



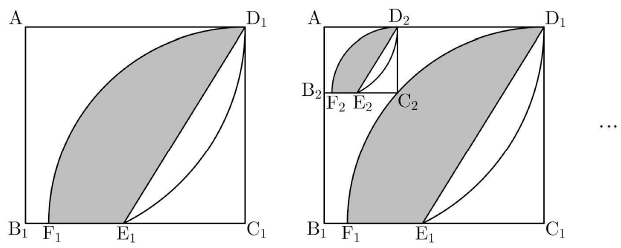
R_1 R_2 ⋯

① $\frac{5+2\sqrt{3}}{12}\pi$ ② $\frac{2+\sqrt{3}}{6}\pi$ ③ $\frac{3+2\sqrt{3}}{12}\pi$

④ $\frac{1+\sqrt{3}}{6}\pi$ ⑤ $\frac{1+2\sqrt{3}}{12}\pi$

[출처] 2021 모의_공공 사관학교 고3 07월 미적분 26

49. 그림과 같이 $\overline{AB_1}=2$, $\overline{AD_1}=\sqrt{5}$인 직사각형 $AB_1C_1D_1$이 있다. 중심이 A이고 반지름의 길이가 $\overline{AD_1}$인 원과 선분 B_1C_1의 교점을 E_1, 중심이 C_1이고 반지름의 길이가 $\overline{C_1D_1}$인 원과 선분 B_1C_1의 교점을 F_1이라 하자. 호 D_1F_1과 두 선분 D_1E_1, F_1E_1로 둘러싸인 부분에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.
그림 R_1에서 선분 AB_1위의 점 B_2, 호 D_1F_1위의 점 C_2, 선분 AD_1위의 점 D_2와 점 A를 꼭짓점으로 하고 $\overline{AB_2}$: $\overline{AD_2}=2$: $\sqrt{5}$인 직사각형 $AB_2C_2D_2$를 그린다.
중심이 A이고 반지름의 길이가 $\overline{AD_2}$인 원과 선분 B_2C_2의 교점을 E_2, 중심이 C_2이고 반지름의 길이가 $\overline{C_2D_2}$인 원과 선분 B_2C_2의 교점을 F_2라 하자. 호 D_2F_2와 두 선분 D_2E_2, F_2E_2로 둘러싸인 부분에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은?

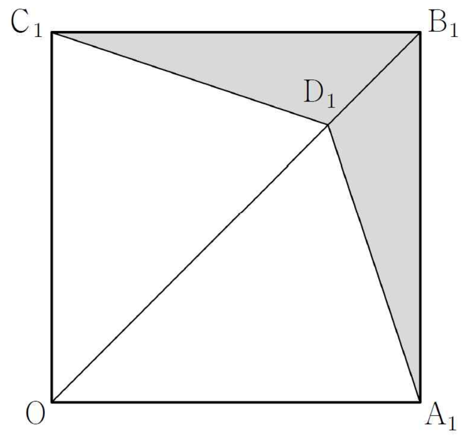


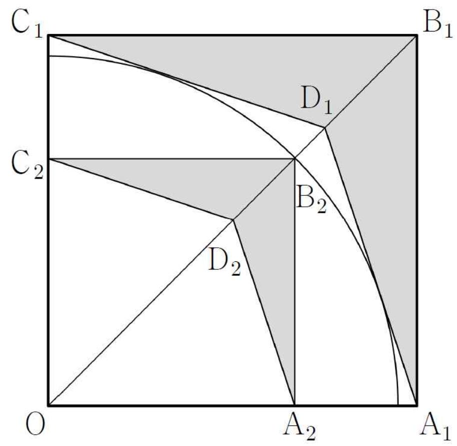
R_1 R_2 …

① $\dfrac{8\pi+8-8\sqrt{5}}{7}$ ② $\dfrac{8\pi+8-7\sqrt{5}}{7}$
③ $\dfrac{9\pi+9-9\sqrt{5}}{8}$ ④ $\dfrac{9\pi+9-8\sqrt{5}}{8}$
⑤ $\dfrac{10\pi+10-10\sqrt{5}}{9}$

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고3 07월 미적분 26

50. 그림과 같이 한 변의 길이가 4인 정사각형 $OA_1B_1C_1$의 대각선 OB_1을 3 : 1로 내분하는 점을 D_1이라 하고, 네 선분 A_1B_1, B_1C_1, C_1D_1, D_1A_1로 둘러싸인 ㄱ모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.
그림 R_1에서 중심이 O이고 두 직선 A_1D_1, C_1D_1에 동시에 접하는 원과 선분 OB_1이 만나는 점을 B_2라 하자. 선분 OB_2를 대각선으로 하는 정사각형 $OA_2B_2C_2$를 그리고 정사각형 $OA_2B_2C_2$에 그림 R_1을 얻는 것과 같은 방법으로 ㄱ모양의 도형을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은?

R_1


R_2


⋮ ⋮

① $\dfrac{70}{11}$ ② $\dfrac{75}{11}$ ③ $\dfrac{80}{11}$
④ $\dfrac{80}{9}$ ⑤ $\dfrac{85}{9}$

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고3 10월 미적분 26

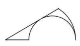
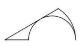
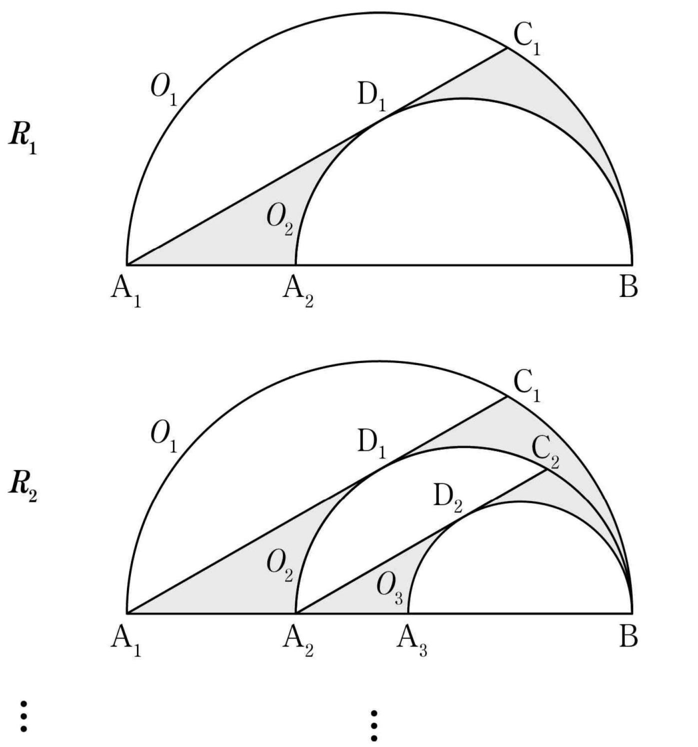
51. 그림과 같이 길이가 2인 선분 A_1B를 지름으로 하는 반원 O_1이 있다. 호 BA_1 위에 점 C_1을 $\angle BA_1C_1 = \frac{\pi}{6}$가 되도록 잡고, 선분 A_2B를 지름으로 하는 반원 O_2가 선분 A_1C_1과 접하도록 선분 A_1B 위에 점 A_2를 잡는다. 반원 O_2와 선분 A_1C_1의 접점을 D_1이라 할 때, 두 선분 A_1A_2, A_1D_1과 호 D_1A_2로 둘러싸인 부분과 선분 C_1D_1과 두 호 BC_1, BD_1로 둘러싸인 부분인  모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

그림 R_1에서 호 BA_2 위에 점 C_2를 $\angle BA_2C_2 = \frac{\pi}{6}$가 되도록 잡고, 선분 A_3B를 지름으로 하는 반원 O_3이 선분 A_2C_2와 접하도록 선분 A_2B 위에 점 A_3을 잡는다. 반원 O_3와 선분 A_2C_2의 접점을 D_2라 할 때, 두 선분 A_2A_3, A_2D_2와 호 D_2A_3으로 둘러싸인 부분과 선분 C_2D_2와 두 호 BC_2, BD_2로 둘러싸인 부분인  모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은?



① $\frac{4\sqrt{3}-\pi}{10}$ ② $\frac{9\sqrt{3}-2\pi}{20}$ ③ $\frac{8\sqrt{3}-\pi}{20}$

④ $\frac{5\sqrt{3}-\pi}{10}$ ⑤ $\frac{9\sqrt{3}-\pi}{20}$

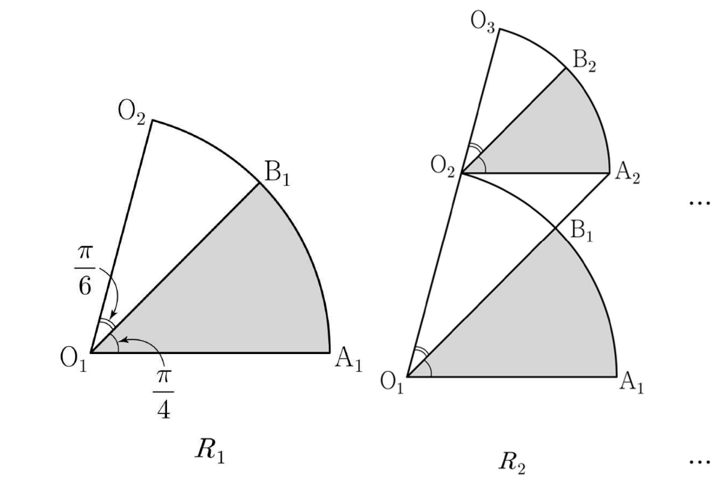
[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 06월 미적분 26

[출처] 2022 일반_시중교재 EBS한국교육방송공사 EBS교육방송 편집부 수능완성 07 수열의 극한 유형7 필수유형

52. 그림과 같이 중심이 O_1, 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가 $\frac{5\pi}{12}$인 부채꼴 $O_1A_1O_2$가 있다. 호 A_1O_2위에 점 B_1을 $\angle A_1O_1B_1 = \frac{\pi}{4}$가 되도록 잡고, 부채꼴 $O_1A_1B_1$에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

그림 R_1에서 점 O_2를 지나고 선분 O_1A_1에 평행한 직선이 직선 O_1B_1과 만나는 점을 A_2라 하자. 중심이 O_2이고 중심각의 크기가 $\frac{5\pi}{12}$인 부채꼴 $O_2A_2O_3$을 부채꼴 $O_1A_1B_1$과 겹치지 않도록 그린다. 호 A_2O_3 위에 점 B_2를 $\angle A_2O_2B_2 = \frac{\pi}{4}$가 되도록 잡고, 부채꼴 $O_2A_2B_2$에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은?



① $\frac{3\pi}{16}$ ② $\frac{7\pi}{32}$ ③ $\frac{\pi}{4}$

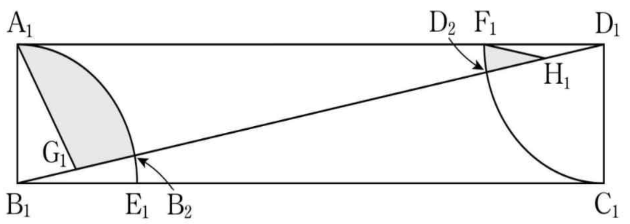
④ $\frac{9\pi}{32}$ ⑤ $\frac{5\pi}{16}$

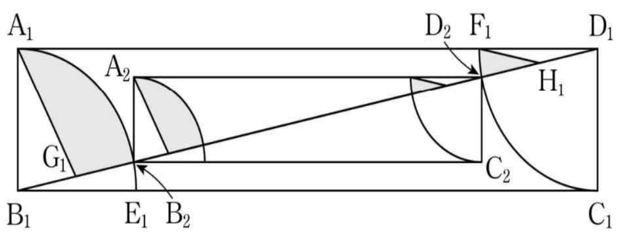
[출처] 2022 모의_공공 교육청 고3 10월 미적분 27

53. 그림과 같이 $\overline{A_1B_1}=1$, $\overline{B_1C_1}=2\sqrt{6}$인 직사각형 $A_1B_1C_1D_1$이 있다. 중심이 B_1이고 반지름의 길이가 1인 원이 선분 B_1C_1과 만나는 점을 E_1이라 하고, 중심이 D_1이고 반지름의 길이가 1인 원이 선분 A_1D_1과 만나는 점을 F_1이라 하자. 선분 B_1D_1이 호 A_1E_1, 호 C_1F_1과 만나는 점을 각각 B_2, D_2라 하고, 두 선분 B_1B_2, D_1D_2의 중점을 각각 G_1, H_1이라 하자. 두 선분 A_1G_1, G_1B_2와 호 B_2A_1로 둘러싸인 부분인 모양의 도형과 두 선분 D_2H_1, H_1F_1과 호 F_1D_2로 둘러싸인 부분인 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

그림 R_1에서 선분 B_2D_2가 대각선이고 모든 변이 선분 A_1B_1 또는 선분 B_1C_1에 평행한 직사각형 $A_2B_2C_2D_2$를 그린다. 직사각형 $A_2B_2C_2D_2$에 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 모양의 도형과 모양의 도형을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은?

R_1


R_2


⋮ ⋮

① $\dfrac{25\pi-12\sqrt{6}-5}{64}$ ② $\dfrac{25\pi-12\sqrt{6}-4}{64}$

③ $\dfrac{25\pi-10\sqrt{6}-6}{64}$ ④ $\dfrac{25\pi-10\sqrt{6}-5}{64}$

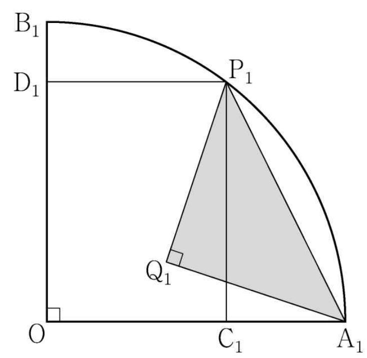
⑤ $\dfrac{25\pi-10\sqrt{6}-4}{64}$

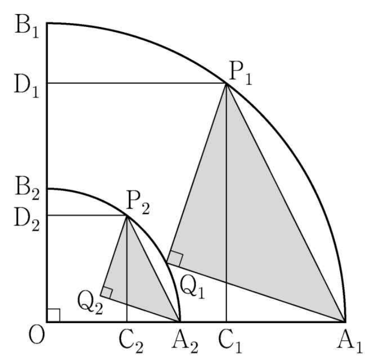
[출처] 2022 모의_공공 평가원 고3 11월 미적분 27

54. 그림과 같이 중심이 O, 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가 $\dfrac{\pi}{2}$인 부채꼴 OA_1B_1이 있다. 호 A_1B_1 위에 점 P_1, 선분 OA_1 위에 점 C_1, 선분 OB_1 위에 점 D_1을 사각형 $OC_1P_1D_1$이 $\overline{OC_1}:\overline{OD_1}=3:4$인 직사각형이 되도록 잡는다. 부채꼴 OA_1B_1의 내부에 점 Q_1을 $\overline{P_1Q_1}=\overline{A_1Q_1}$, $\angle P_1Q_1A_1=\dfrac{\pi}{2}$가 되도록 잡고, 이등변삼각형 $P_1Q_1A_1$에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

그림 R_1에서 선분 OA_1 위의 점 A_2와 선분 OB_1 위의 점 B_2를 $\overline{OQ_1}=\overline{OA_2}=\overline{OB_2}$가 되도록 잡고, 중심이 O, 반지름의 길이가 $\overline{OQ_1}$, 중심각의 크기가 $\dfrac{\pi}{2}$인 부채꼴 OA_2B_2를 그린다. 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 네 점 P_2, C_2, D_2, Q_2를 잡고, 이등변삼각형 $P_2Q_2A_2$에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은?

R_1


R_2


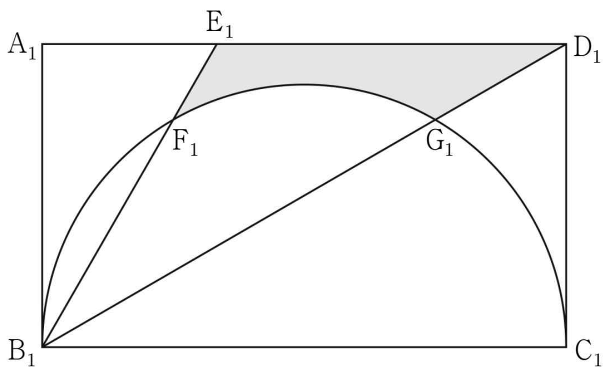
⋮ ⋮

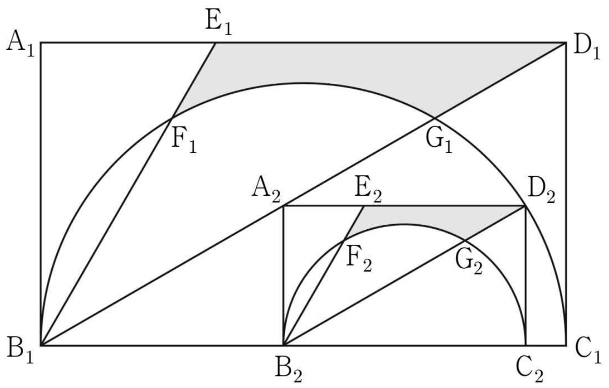
① $\dfrac{9}{40}$ ② $\dfrac{1}{4}$ ③ $\dfrac{11}{40}$

④ $\dfrac{3}{10}$ ⑤ $\dfrac{13}{40}$

[출처] 2022 모의_공공 교육청 고3 04월 미적분 28

55. 그림과 같이 $\overline{A_1B_1}=2$, $\overline{B_1C_1}=2\sqrt{3}$인 직사각형 $A_1B_1C_1D_1$이 있다. 선분 A_1D_1을 $1:2$로 내분하는 점을 E_1이라 하고 선분 B_1C_1을 지름으로 하는 반원의 호 B_1C_1이 두 선분 B_1E_1, B_1D_1과 만나는 점 중 점 B_1이 아닌 점을 각각 F_1, G_1이라 하자. 세 선분 F_1E_1, E_1D_1, D_1G_1과 호 F_1G_1로 둘러싸인 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자. 그림 R_1에 선분 B_1G_1 위의 점 A_2, 호 G_1C_1 위의 점 D_2와 선분 B_1C_1 위의 두 점 B_2, C_2를 꼭짓점으로 하고 $\overline{A_2B_2}:\overline{B_2C_2}=1:\sqrt{3}$인 직사각형 $A_2B_2C_2D_2$를 그린다. 직사각형 $A_2B_2C_2D_2$에 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 모양의 도형을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}S_n$의 값은?





① $\frac{169}{864}(8\sqrt{3}-3\pi)$ ② $\frac{169}{798}(8\sqrt{3}-3\pi)$

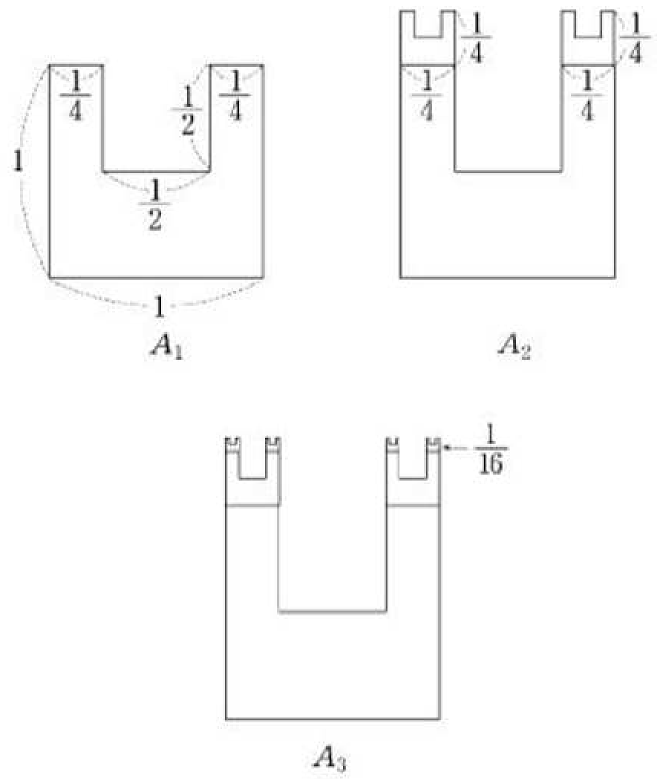
③ $\frac{169}{720}(8\sqrt{3}-3\pi)$ ④ $\frac{169}{864}(16\sqrt{3}-3\pi)$

⑤ $\frac{169}{798}(16\sqrt{3}-3\pi)$

[출처] 2004 모의_공공 평가원 고3 11월 공통범위 25

[출처] 2004 모의_공공 평가원 고3 11월 25

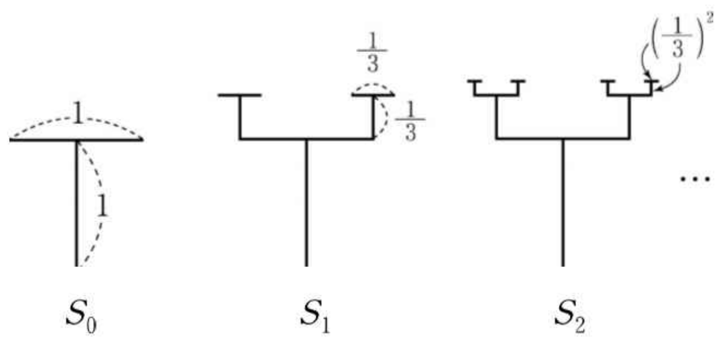
56. 아래 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정사각형에서 한 변의 길이가 $\frac{1}{2}$인 정사각형을 잘라낸 후 남은 凹모양의 도형을 A_1이라 하자. 한 변의 길이가 $\frac{1}{4}$인 정사각형에서 한 변의 길이가 $\frac{1}{8}$인 정사각형을 잘라낸 후 남은 凹 모양의 도형 2개를 A_1의 위쪽 두 변에 각각 붙인 도형을 A_2라 하자. 한 변의 길이가 $\frac{1}{16}$인 정사각형에서 한 변의 길이가 $\frac{1}{32}$인 정사각형을 잘라낸 후 남은 凹 모양의 도형 4개를 A_2의 위쪽 네 변에 각각 붙인 도형을 A_3이라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 얻은 n번째 도형을 A_n이라 하고 그 넓이를 S_n이라 하자. $\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{q}{p}$라 할 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)



[출처] 2004 모의_공공 평가원 고3 06월 공통범위 24

[출처] 2004 모의_공공 평가원 고3 06월 24

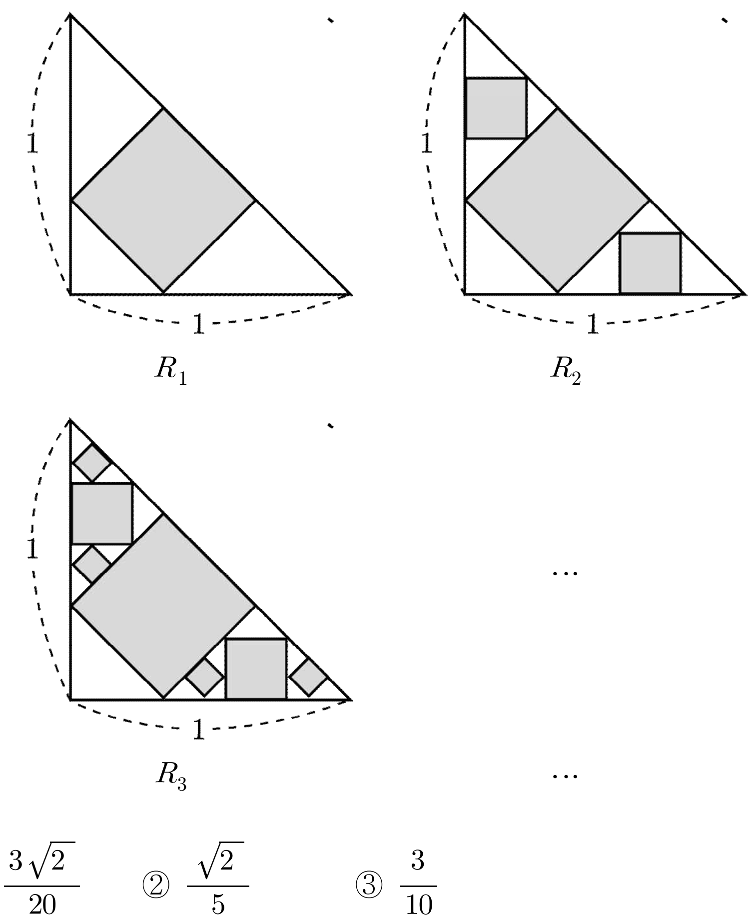
57. 그림과 같이 길이가 1인 선분 2개로 만든 ‘T’ 모양의 도형을 S_0이라 하자. 도형 S_0의 위쪽에 있는 선분의 양끝에 길이가 $\frac{1}{3}$인 선분 2개로 만든 ‘T’ 모양의 도형을 붙여 도형 S_1을 만든다. 이와 같은 방법으로 도형 S_{n-1}의 가장 위쪽에 있는 각 선분의 양끝에 길이가 $\left(\frac{1}{3}\right)^n$인 선분 2개로 만든 ‘T’ 모양의 도형을 붙여 도형 S_n을 만든다. 도형 S_n을 이루는 모든 선분의 길이의 합을 l_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} l_n$의 값을 구하시오.



[출처] 2006 모의_공공 평가원 고3 11월 공통범위 17

[출처] 2006 모의_공공 평가원 고3 11월

58. 아래와 같이 직각을 낀 두 변의 길이가 1인 직각이등변 삼각형이 있다. 이 직각이등변삼각형의 빗변에 2개의 꼭짓점이 있고, 직각을 낀 두 변에 나머지 2개의 꼭짓점이 있는 정사각형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자. 그림 R_1에서 합동인 2개의 직각이등변삼각형의 각 빗변에 2개의 꼭짓점이 있고, 직각을 낀 두 변에 나머지 2개의 꼭짓점이 있는 2개의 정사각형에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.
그림 R_2에서 합동인 4개의 직각이등변삼각형의 각 빗 변에 2개의 꼭짓점이 있고, 직각을 낀 두 변에 나머지 2개의 꼭짓점이 있는 4개의 정사각형에 색칠하여 얻은 그림을 R_3이라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 모든 정사각형의 넓이의 합을 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은?



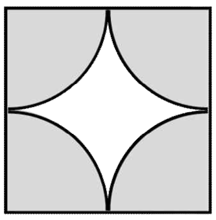
① $\frac{3\sqrt{2}}{20}$ ② $\frac{\sqrt{2}}{5}$ ③ $\frac{3}{10}$

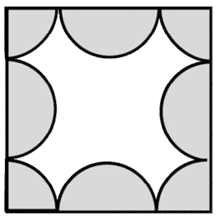
④ $\frac{\sqrt{3}}{5}$ ⑤ $\frac{2}{5}$

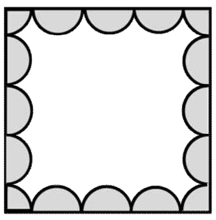
[출처] 2006 모의_공공 사관학교 고3 07월 24

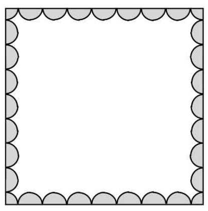
[출처] 2006 모의_공공 사관학교 고3 07월 24

59. 한 변의 길이가 1인 정사각형을 R라 하자. R의 각 변을 2등분한 후 [그림1]과 같이 각 꼭짓점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\frac{1}{2}$인 사분원을 그릴 때, 어두운 부분의 넓이를 S_1이라 하자. R의 각 변을 4등분한 후 [그림2]와 같이 각 꼭짓점 및 각 변의 이등분점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\frac{1}{4}$인 사분원과 반원을 그릴 때, 어두운 부분의 넓이를 S_2라 하자. R의 각 변을 8등분한 후 [그림3]과 같이 각 꼭짓점 및 각 변의 사등분점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\frac{1}{8}$인 사분원과 반원을 그릴 때, 어두운 부분의 넓이를 S_3이라 하자. 이와 같은 방법으로 S_4, S_5, S_6, $\cdots$을 구할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값은?


[그림1]


[그림2]


[그림3]


[그림4]

…

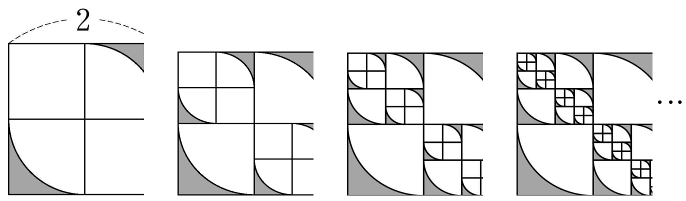
① $\frac{2}{3}\pi$　② $\frac{3}{4}\pi$　③ $\frac{7}{9}\pi$

④ $\frac{7}{8}\pi$　⑤ $\frac{8}{9}\pi$

[출처] 2006 모의_공공 평가원 고3 09월 14

[출처] 2006 모의_공공 평가원 고3 09월 공통범위 14

60. 그림과 같이 한 변의 길이가 2인 정사각형을 넓이가 같은 4개의 정사각형으로 나누고 반지름의 길이가 1인 사분원 2개의 외부(어두운 부분)를 잘라낸 후 남은 도형을 T_1이라 하자. T_1에서 한 변의 길이가 1인 정사각형 2개를 각각 넓이가 같은 4개의 정사각형으로 나누고 반지름의 길이가 $\frac{1}{2}$인 사분원 4개의 외부(어두운 부분)를 잘라낸 후 남은 도형을 T_2라 하자. T_2에서 한 변의 길이가 $\frac{1}{2}$인 정사각형 4개를 각각 넓이가 같은 4개의 정사각형으로 나누고 반지름의 길이가 $\frac{1}{4}$인 사분원 8개의 외부(어두운 부분)를 잘라낸 후 남은 도형을 T_3이라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 도형을 T_n이라 하고 그 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은?



T_1　T_2　T_3　T_4

① $\frac{\pi}{2}$　② $\frac{2}{3}\pi$　③ $\frac{3}{4}\pi$

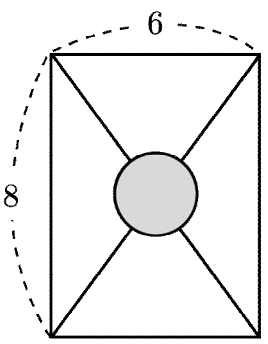
④ π　⑤ $\frac{5}{4}\pi$

[출처] 2007 모의_공공 평가원 고3 11월 공통범위 17

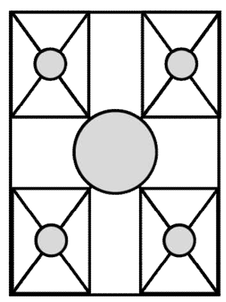
[출처] 2007 모의_공공 평가원 고3 11월 17

61. 아래와 같이 가로의 길이가 6 이고 세로의 길이가 8 인 직사각형 내부에 두 대각선의 교점을 중심으로 하고, 직사각형 가로 길이의 $\frac{1}{3}$ 을 지름으로 하는 원을 그려서 얻은 그림을 R_1 이라 하자. 그림 R_1 에서 직사각형의 각 꼭짓점으로부터 대각선과 원의 교점까지의 선분을 각각 대각선으로 하는 4 개의 직사각형을 그린 후, 새로 그려진 직사각형 내부에 두 대각선의 교점을 중심으로 하고, 새로 그려진 직사각형 가로 길이의 $\frac{1}{3}$ 을 지름으로 하는 원을 그려서 얻은 그림을 R_2 라 하자. 그림 R_2 에 있는 합동인 4 개의 직사각형 각각에서 각 꼭짓점으로부터 대각선과 원의 교점까지의 선분을 각각 대각선으로 하는 4 개의 직사각형을 그린 후, 새로 그려 진 직사각형 내부에 두 대각선의 교점을 중심으로 하고, 새로 그려진 직사각형 가로 길이의 $\frac{1}{3}$ 을 지름으로 하는 원을 그려서 얻은 그림을 R_3 이라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n 번째 얻은 그림 R_n 에 있는 모든 원의 넓이의 합을 S_n 이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$ 의 값은?

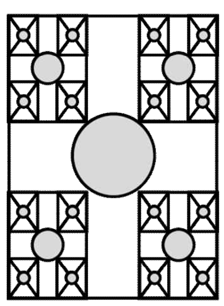
(단, 모든 직사각형의 가로와 세로는 각각 서로 평행하다.)



R_1



R_2



R_3

…

…

① $\frac{37}{9}\pi$ ② $\frac{34}{9}\pi$ ③ $\frac{31}{9}\pi$

④ $\frac{28}{9}\pi$ ⑤ $\frac{25}{9}\pi$

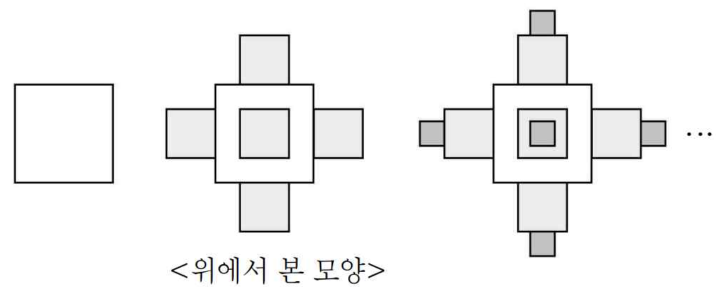
[출처] 2007 모의_공공 교육청 고3 04월 14

62. 그림은 단계별로 만들어지는 어떤 입체를 위에서 본 모양과 앞에서 본 모양을 나타낸 것이다.

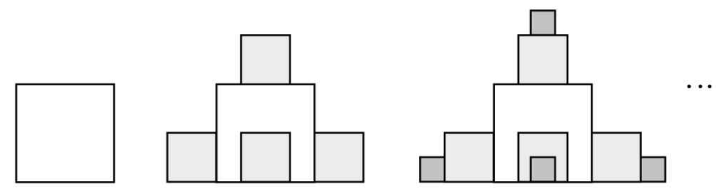
> [1단계] 한 모서리의 길이가 1 인 정육면체를 평면 위에 놓는다.
>
> [2단계] [1단계] 입체에 한 모서리의 길이가 $\frac{1}{2}$ 인 정육면체를 위, 왼쪽, 오른쪽, 앞, 뒤에 각각 1 개씩 붙인다.
>
> [3단계] [2단계] 입체에 한 모서리의 길이가 $\frac{1}{2^2}$ 인 정육면체를 위, 왼쪽, 오른쪽, 앞, 뒤에 각각 1 개씩 붙인다.
>
> …

이와 같은 과정을 계속하여 [n단계]에서 얻어진 입체의 부피를 V_n 이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} V_n$ 의 값은?

[1단계] [2단계] [3단계]



<위에서 본 모양>



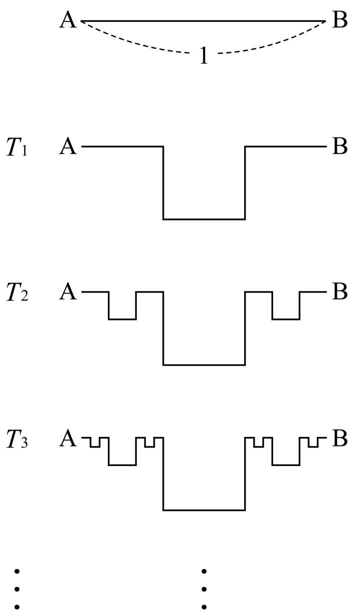
<앞에서 본 모양>

① $\frac{8}{7}$ ② $\frac{9}{7}$ ③ $\frac{10}{7}$

④ $\frac{11}{7}$ ⑤ $\frac{12}{7}$

[출처] 2007 모의_공공 교육청 고3 03월 29

63. 길이가 1인 선분 AB가 있다. 그림과 같이 선분 AB를 3등분한 다음, 가운데 선분을 한 변으로 하는 정사각형을 그리고, 가운데 선분을 지워 만든 도형을 T_1이라 하자. T_1의 선분 중 원래의 선분 AB에서 남아 있는 두 선분을 각각 3등분한 다음, 가운데 선분을 한 변으로 하는 정사각형을 그리고, 가운데 선분을 지워 만든 도형을 T_2라 하자. T_2의 선분 중 원래의 선분 AB에서 남아 있는 네 선분을 각각 3등분한 다음, 가운데 선분을 한 변으로 하는 정사각형을 그리고, 가운데 선분을 지워 만든 도형을 T_3이라 하자. 이와 같은 과정을 계속 반복하여 n번째 만든 도형을 T_n이라 하고, T_n에 있는 모든 선분의 길이의 총합을 a_n이라 하자. 이때 $\lim_{n\to\infty} a_n$의 값은?



① 3 ② $\frac{10}{3}$ ③ $\frac{11}{3}$

④ 4 ⑤ $\frac{13}{3}$

[출처] 2009 모의_공공 교육청 고3 04월 공통범위 25

[출처] 2009 모의_공공 교육청 고3 04월 25

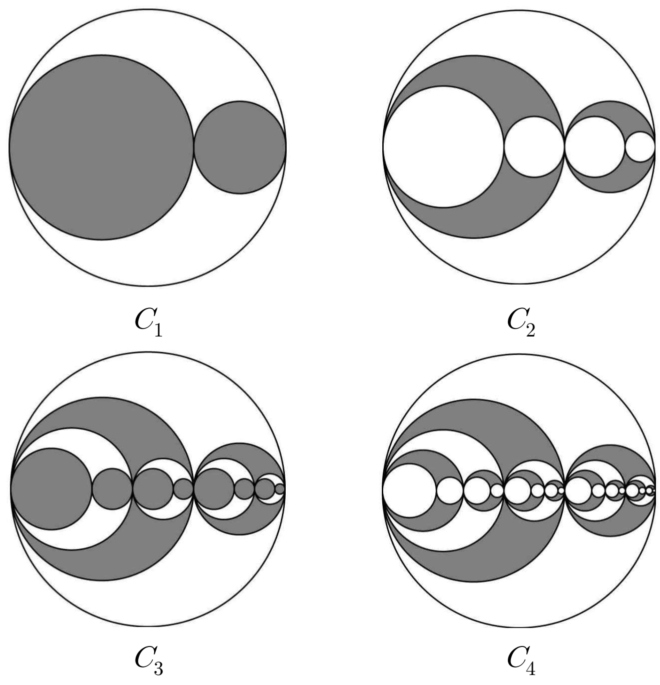
64. 원에 다음 과정을 실행한다.

<과 정>

Ⅰ. 원의 지름을 2 : 1로 내분하는 점을 잡는다.

Ⅱ. 이 원에 내접하면서 Ⅰ의 내분점에서 서로 외접하는 두 개의 원을 그린다.

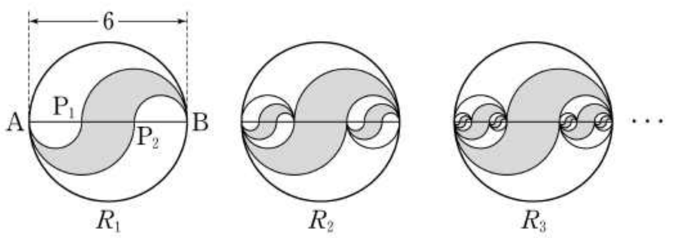
지름의 길이가 6인 원이 있다. 이 원에 [과정]을 실행하여 그린 2개의 원의 내부를 색칠하여 얻어진 그림을 C_1이라 하자. 그림 C_1에서 새로 그려진 2개의 원에 각각 [과정]을 실행하여 그린 4개의 원의 내부를 제외하여 얻어진 그림을 C_2라 하자. 그림 C_2에서 새로 그려진 4개의 원에 각각 [과정]을 실행하여 그린 8개의 원의 내부를 색칠하여 얻어진 그림을 C_3이라 하자. 그림 C_3에서 새로 그려진 8개의 원에 각각 [과정]을 실행하여 그린 16개의 원의 내부를 제외하여 얻어진 그림을 C_4라 하자. 이와 같은 방법으로 n번째 얻어진 그림 C_n에서 색칠된 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{p}{q}\pi$ (p와 q는 서로소인 자연수)이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, 모든 원의 중심은 처음 원의 한 지름 위에 있다.)



[출처] 2009 모의_공공 평가원 고3 06월 12

[출처] 2009 모의_공공 평가원 고3 06월 12

65. 그림과 같이 길이가 6인 선분 AB를 지름으로 하는 원을 그리고, 선분 AB의 3등분점을 각각 $\mathrm{P_1}$, $\mathrm{P_2}$라 하고 선분 $\mathrm{AP_1}$을 지름으로 하는 원의 아래쪽 반원, 선분 $\mathrm{AP_2}$를 지름으로 하는 원의 아래쪽 반원, 선분 $\mathrm{P_2B}$를 지름으로 하는 원의 위쪽 반원, 선분 $\mathrm{P_1B}$를 지름으로 하는 원의 위쪽 반원을 경계로 하여 만든 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 $\mathrm{P_1}$이라 하자. 그림 R_1에서 선분 AB 위의 색칠되지 않은 두 선분 $\mathrm{AP_1}$, $\mathrm{P_2B}$를 각각 지름으로 하는 두 원을 그리고, 이 두 원 안에 각각 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 만들어지는 두 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자. 그림 R_2에서 두 선분 $\mathrm{AP_1}$, $\mathrm{P_2B}$ 위의 색칠되지 않은 네 선분을 각각 지름으로 하는 네 원을 그리고, 이 네 원 안에 각각 그림 R_1을 얻는 것과 같은 방법으로 만들어지는 네 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_3이라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 모든 모양의 도형의 넓이의 합을 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은?

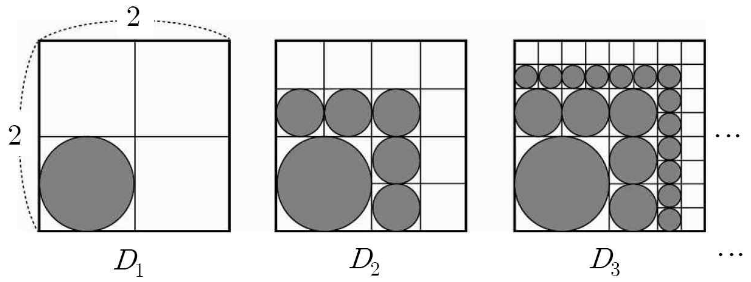


① $\frac{25}{7}\pi$ ② $\frac{27}{7}\pi$ ③ $\frac{29}{7}\pi$

④ $\frac{31}{7}\pi$ ⑤ $\frac{33}{7}\pi$

[출처] 2010 모의_공공 교육청 고2 11월

66. 아래와 같이 한 변의 길이가 2인 정사각형을 넓이가 같은 4개의 정사각형으로 만든 후, 이 중 한 개의 정사각형에 내접원을 그려서 얻은 그림을 D_1이라 하고, 이 내접원의 넓이를 S_1이라 하자. D_1에서 내접원이 없는 나머지 정사각형을 각각 넓이가 같은 4개의 정사각형으로 만든 후, 새로 만들어진 정사각형 중에서 내접원이 있는 정사각형과 인접한 각각의 정사각형에 내접원을 그려서 얻은 그림을 D_2라 하고, D_2에 있는 모든 원의 넓이의 합을S_2라 하자. D_2에서 내접원이 없는 나머지 정사각형을 각각 넓이가 같은 4개의 정사각형으로 만든 후, 새로 만들어진 정사각형 중에서 내접원이 있는 정사각형과 인접한 각각의 정사각형에 내접원을 그려서 얻은 그림을 D_3라 하고, D_3에 있는 모든 원의 넓이의 합을 S_3라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 D_n에 있는 모든 원의 넓이의 합을 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}S_n$의 값은?



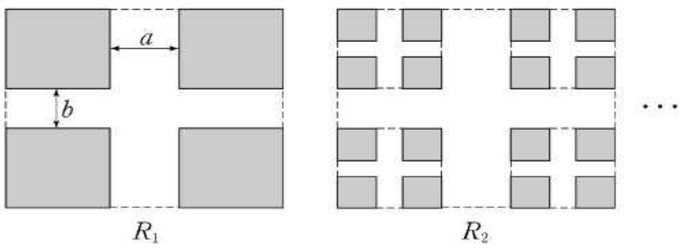
① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ③ 1

④ $\sqrt{2}$ ⑤ $2\sqrt{2}$

[출처] 2010 모의_공공 평가원 고3 06월 공통범위 10

[출처] 2010 모의_공공 평가원 고3 06월 10

67. 가로의 길이가 5이고 세로의 길이가 4인 직사각형에서 그림과 같이 가로의 폭 a가 직사각형의 가로의 길이의 $\frac{1}{4}$, 세로의 폭 b가 직사각형의 세로의 길이의 $\frac{1}{5}$인 ✚모양의 도형을 잘라내어 얻은 4개의 직사각형을 R_1이라 하고, 그 4개의 직사각형의 넓이의 합을 S_1이라 하자. R_1의 각 직사각형에서 가로의 폭이 각 직사각형의 가로의 길이의 $\frac{1}{4}$, 세로의 폭이 각 직사각형의 세로의 길이의 $\frac{1}{5}$인 모양의 도형을 잘라내어 얻은 16개의 직사각형을 R_2라 하고, 그 16개의 직사각형의 넓이의 합을 S_2라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 R_n의 4^n개의 직사각형의 넓이의 합을 S_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값은?

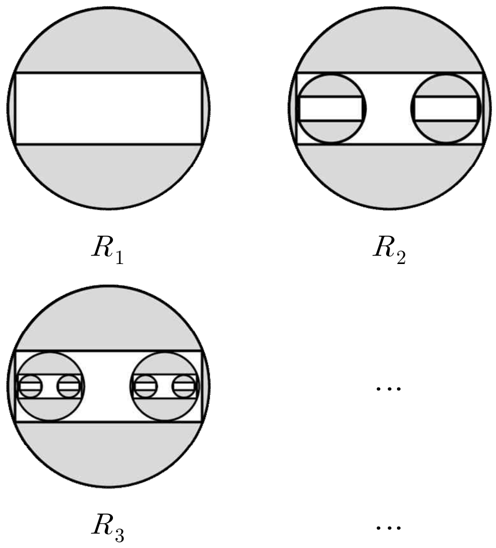


① 26 ② 30 ③ 34 ④ 38 ⑤ 42

[출처] 2011 모의_공공 평가원 고3 11월 14

[출처] 2011 모의_공공 평가원 고3 11월 14

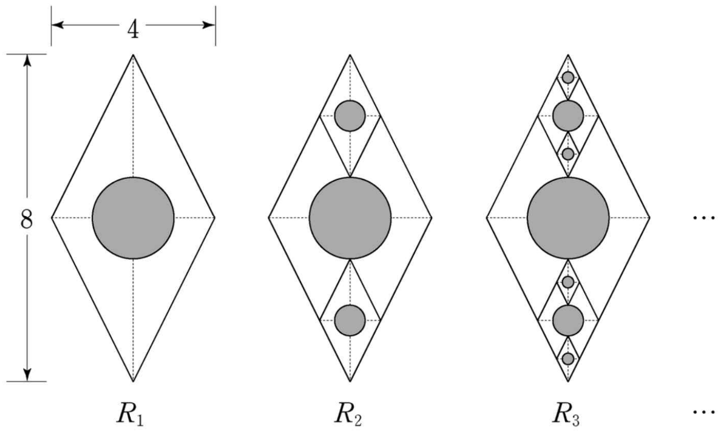
68. 반지름의 길이가 1인 원이 있다. 그림과 같이 가로의 길이와 세로의 길이의 비가 $3:1$인 직사각형을 이 원에 내접하도록 그리고, 원의 내부와 직사각형의 외부의 공통부분에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자. 그림 R_1에서 직사각형의 세변에 접하도록 원 2개를 그린다. 새로 그려진 각원에 그림 R_1을 얻는 것과 같은 방법으로 직사각형을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자. 그림 R_2에서 새로 그려진 직사각형의 세 변에 접하도록 원 4개를 그린다. 새로 그려진 각 원에 그림 R_1을 얻는 것과 같은 방법으로 직사각형을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_3라고 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에서 색칠된 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n \to \infty} S_n$의 값은?



① $\frac{5}{4}\pi - \frac{5}{3}$ ② $\frac{5}{4}\pi - \frac{3}{2}$ ③ $\frac{4}{3}\pi - \frac{8}{5}$ ④ $\frac{5}{4}\pi - 1$ ⑤ $\frac{4}{3}\pi - \frac{16}{15}$

[출처] 2011 모의_공공 평가원 고3 09월 9

69. 그림과 같이 두 대각선의 길이가 각각 8, 4인 마름모 내부에 두 대각선의 교점을 중심으로 하고 짧은 대각선의 길이의 $\frac{1}{2}$을 지름으로 하는 원을 그려서 얻은 그림을 R_1이라 하자. 그림 R_1에 있는 마름모에 긴 대각선의 양 끝점으로부터 그 대각선과 원의 두 교점 중 가까운 점까지의 선분을 각각 긴 대각선으로 하고, 마름모의 이웃하는 두 변 위에 짧은 대각선의 양 끝점이 놓이도록 마름모를 2개 그린다. 새로 그려진 각 마름모에서, 두 대각선의 교점을 중심으로 하고 짧은 대각선의 길이의 $\frac{1}{2}$을 지름으로 하는 원을 그려서 얻은 그림을 R_2라 하자. 그림 R_2에 있는 작은 두 마름모에 긴 대각선의 양 끝점으로부터 그 대각선과 원의 두 교점 중 가까운 점까지의 선분을 각각 긴 대각선으로 하고 , 마름모의 이웃하는 두 변 위에 짧은 대각선의 양 끝점이 놓이도록 마름모를 4개 그린다. 새로 그려진 각 마름모에서, 두 대각선의 교점을 중심으로 하고 짧은 대각선의 길이의 $\frac{1}{2}$을 지름으로 하는 원을 그려서 얻은 그림을 R_3라고 하자. 이와 같은 방법으로 n번째 얻은 그림 R_n에 있는 모든 원의 넓이의 합을 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은?



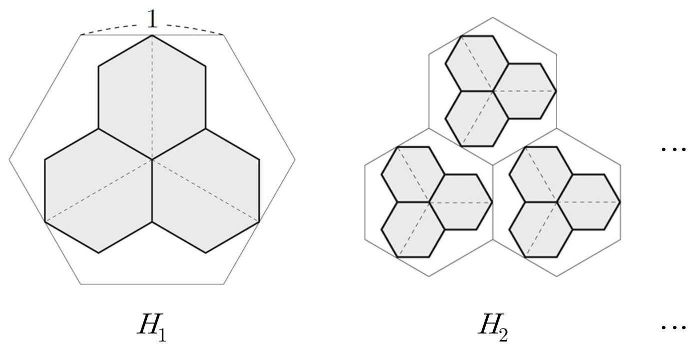
① $\frac{16}{13}\pi$ ② $\frac{32}{25}\pi$ ③ $\frac{4}{3}\pi$

④ $\frac{32}{23}\pi$ ⑤ $\frac{16}{11}\pi$

[출처] 2012 모의_공공 교육청 고3 04월 20

[출처] 2012 모의_공공 교육청 고3 04월 20

70. 한 변의 길이가 1인 정육각형에서 서로 이웃하지 않는 세 변의 중점과 이 정육각형에 외접하는 원의 중심을 각각 연결하여 세 선분을 얻는다. 이 세 선분을 각각 가장 긴 대각선으로 하는 3개의 정육각형을 그려서 얻은 모양의 그림을 H_1이라 하고, 그림 H_1의 넓이를 S_1이라 하자. 그림 H_1에서 새로 그려진 세 정육각형 내부에 각각 그림 H_1을 얻은 것과 같은 방법으로 그려서 얻은 3개의 모양의 그림을 H_2라하고, 그림 H_2의 넓이를 S_2라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 그려서 얻은 3^{n-1}개의 모양의 그림을 H_n이라 하고, 그림 H_n의 넓이를 S_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값은?



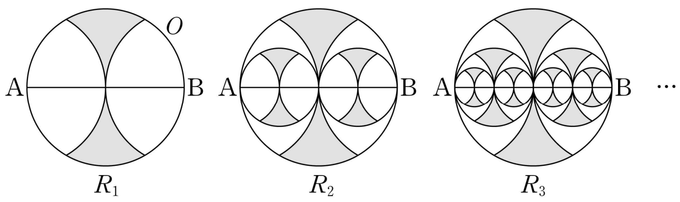
① $\frac{27}{11}\sqrt{3}$ ② $\frac{9}{4}\sqrt{3}$ ③ $\frac{27}{13}\sqrt{3}$

④ $\frac{27}{14}\sqrt{3}$ ⑤ $\frac{9}{5}\sqrt{3}$

[출처] 2012 모의_공공 평가원 고3 09월 9

[출처] 2012 모의_공공 평가원 고3 09월 9

71. 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 원 O가 있다. A, B를 각각 중심으로 하고 원 O와 반지름의 길이가 같은 두 원의 외부와 원 O의 내부의 공통부분인 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자. 그림 R_1에 선분 AB를 2등분한 선분을 각각 지름으로 하는 두 원을 그리고, 이 두 원 안에 각각 그림 R_1을 얻는 것과 같은 방법으로 만들어지는 모양의 두 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자. 그림 R_2에 선분 AB를 4등분한 선분을 각각 지름으로 하는 네 원을 그리고, 이 네 원 안에 각각 그림 R_1을 얻는 것과 같은 방법으로 만들어지는 모양의 네 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_3이라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 모양의 모든 도형의 넓이의 합을 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은?



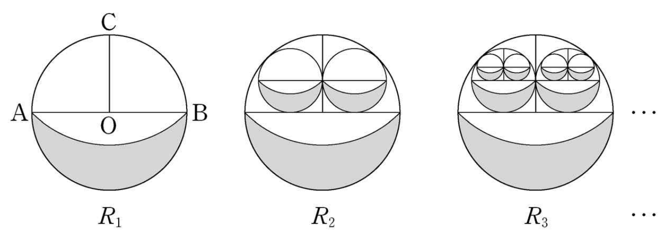
① $3\sqrt{3}-\frac{4}{3}\pi$ ② $2\sqrt{3}-\frac{2}{3}\pi$ ③ $2\sqrt{3}-\frac{\pi}{2}$

④ $3\sqrt{3}-\pi$ ⑤ $3\sqrt{3}-\frac{2}{3}\pi$

[출처] 2012 모의_공공 평가원 고3 11월 14

[출처] 2012 모의_공공 평가원 고3 11월 14

72. 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 원 O가 있다. 원 O의 중심을 지나고 선분 AB와 수직인 직선이 원과 만나는 2개의 점 중 한 점을 C라 하자. 점 C를 중심으로 하고 점 A와 점 B를 지나는 원의 외부와 점 O의 내부의 공통부분인 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자. 그림 R_1에서 색칠된 부분을 포함하지 않은 원 O의 반원을 이등분한 2개의 사분원에 각각 내접하는 원을 그리고, 이 2개의 원 안에 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 만들어지는 모양의 2개의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라고 하자. 그림 R_2에서 새로 생긴 2개의 원의 색칠된 부분을 포함하지 않은 반원을 각각 이등분한 4개의 사분원에 각각 내접하는 원을 그리고, 이 4개의 원 안에 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 만들어지는 모양의 4개의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_3라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_2이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은?

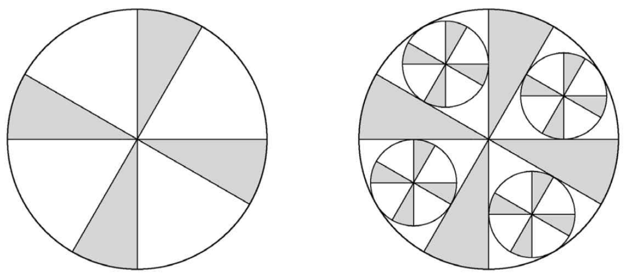


① $\frac{5+2\sqrt{2}}{7}$ ② $\frac{5+3\sqrt{2}}{7}$ ③ $\frac{5+4\sqrt{2}}{7}$

④ $\frac{5+5\sqrt{2}}{7}$ ⑤ $\frac{5+6\sqrt{2}}{7}$

[출처] 2013 모의_공공 평가원 고3 09월 16

73. 그림과 같이 반지름의 길이가 1인 원에 중심각의 크기가 60°이고 반지름의 길이가 1인 부채꼴을 서로 겹치지 않게 4개 그린 후 원의 내부와 새로 그린 부채꼴의 외부에 공통으로 속하는 영역을 색칠하여 얻은 그림을 [그림 1]이라 하자.[그림 1]에서 색칠되지 않은 각 부채꼴에 두 반지름과 호에 모두 접하도록 원을 그린다. 새로 그린 각 원에 중심각의 크기가 60°이고 반지름의 길이가 새로 그린 원의 반지름의 길이와 같은 부채꼴을 서로 겹치지 않게 4개씩 그린 후 새로 그린 원의 내부와 새로 그린 부채꼴의 외부에 공통으로 속하는 영역을 색칠하여 얻은 그림을 [그림 2]라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림에서 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은?



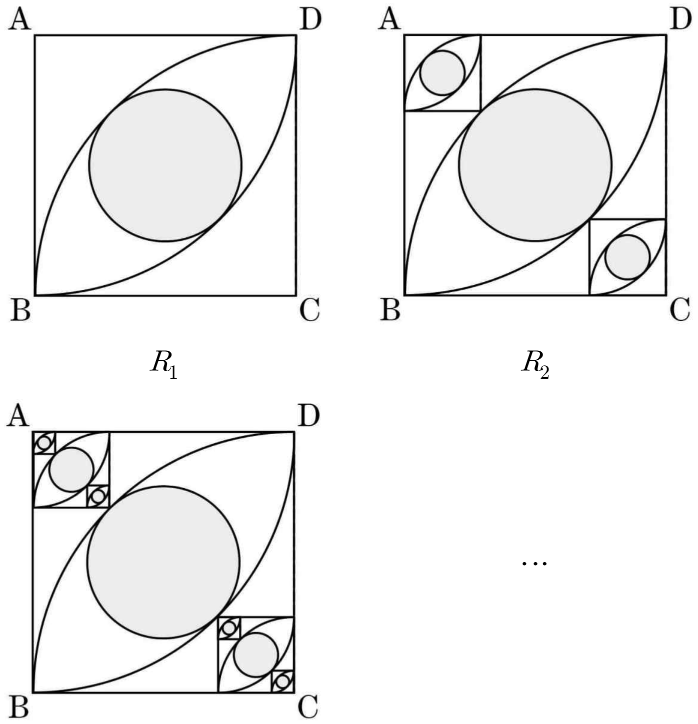
[그림 1] [그림 2] …

① $\frac{7}{15}\pi$ ② $\frac{8}{15}\pi$ ③ $\frac{3}{5}\pi$

④ $\frac{2}{3}\pi$ ⑤ $\frac{11}{15}\pi$

[출처] 2013 모의_공공 교육청 고3 10월 19

74. 그림과 같이 한 변의 길이가 2인 정사각형 ABCD 안에 꼭짓점 A, C를 중심으로 하고 선분 AB, CD를 반지름으로 하는 사분원을 각각 그린다. 두 사분원의 호로 둘러싸인 부분에 내접하는 가장 큰 원을 그리고, 그 내부를 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자. 그림 R_1에서 두 꼭짓점 A, C로부터 두 사분원의 호와 원이 접하는 두 점 중 가까운 점까지의 선분을 대각선으로 하는 정사각형을 각각 그린다. 이 2개의 정사각형 안에 그림 R_1에서 얻은 것과 같은 방법으로 만들어지는 2개의 원의 내부를 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자. 그림 R_2에 있는 작은 두 정사각형에서 두 꼭짓점으로부터 사분원과 원의 접점 중 가까운 점까지의 선분을 대각선으로 하는 정사각형을 각각 그린다. 이 4개의 정사각형 안에 그림 R_1에서 얻은 것과 같은 방법으로 만들어지는 4개의 원의 내부를 색칠하여 얻은 그림을 R_3이라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에서 색칠된 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은?



R_1 R_2 R_3 …

① $(3-2\sqrt{2})\pi$ ② $(2-\sqrt{3})\pi$ ③ $(\sqrt{2}-1)\pi$

④ $(4-2\sqrt{3})\pi$ ⑤ $(2-\sqrt{2})\pi$

[출처] 2013 모의_공공 평가원 고3 예비 14

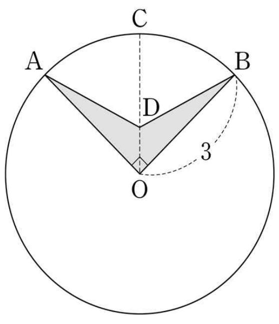
[출처] 2013 모의_공공 평가원 고3 예비 16

75. 중심이 O이고 반지름의 길이가 3인 원이 있다. 그림과 같이 $\angle AOB = \frac{\pi}{2}$인 원 위의 두 점을 A, B라 하고, 호 AC와 호 BC의 길이가 같은 점을 C라 하자. 선분 OC를 $1:2$로 내분하는 점을 D라 하고, 네 선분 OA, AD, DB, BO로 둘러싸인 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

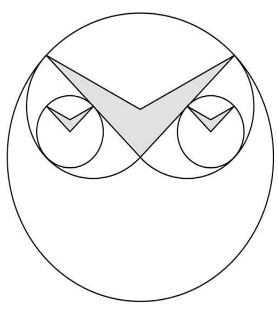
그림 R_1에서 두 반지름 OA, OB를 각각 지름으로 하는 두 반원을 그리고, 두 반원 안에 지름의 길이가 최대인 내접원을 각각 그린다. 두 내접원 안에 각각 그림 R_1을 얻는 것과 같은 방법으로 만들어지는 두 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

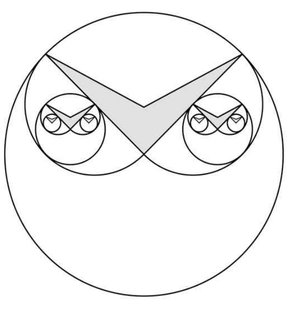
그림 R_2에서 그린 두 내접원의 4개의 반지름을 각각 지름으로 하는 4개의 반원을 그리고, 4개의 반원 안에 지름의 길이가 최대인 내접원을 각각 그린다. 4개의 내접원 안에 각각 그림 R_1을 얻는 것과 같은 방법으로 만들어지는 4개의 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_3이라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 모든 모양의 도형의 넓이의 합을 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은?



R_1

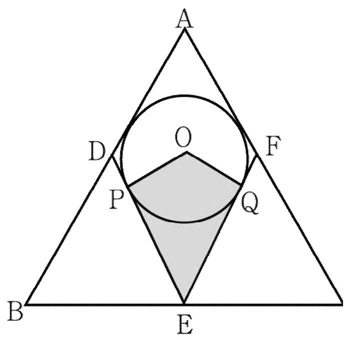

R_2


......
R_3

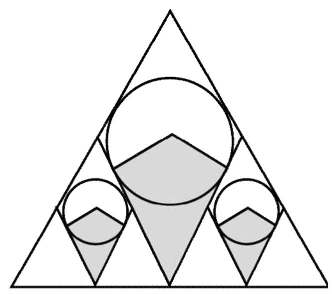
① $\frac{11\sqrt{2}}{7}$ ② $\frac{12\sqrt{2}}{7}$ ③ $\frac{13\sqrt{2}}{7}$
④ $2\sqrt{2}$ ⑤ $\frac{15\sqrt{2}}{7}$

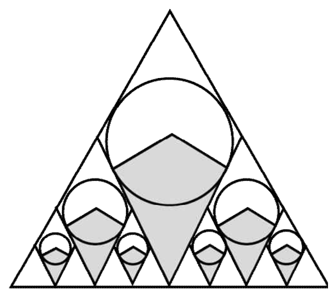
[출처] 2015 모의_공공 교육청 고3 07월 20

76. 그림과 같이 한 변의 길이가 8인 정삼각형 ABC가 있다. 세 선분 AB, BC, CA의 중점을 각각 D, E, F라 하고 두 정삼각형 BED, ECF를 그린 후 마름모 ADEF에 중심이 O인 원을 내접하도록 그린다. 원과 두 선분 DE, EF의 접점을 각각 P, Q라 할 때, 사각형 OPEQ를 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자. 그림 R_1에서 새로 그려진 두 개의 정삼각형의 내부에 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 두 개의 사각형을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자. 그림 R_2에서 새로 그려진 네 개의 정삼각형의 내부에 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 네 개의 사각형을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_3이라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은?



R_1


R_2


R_3

⋯

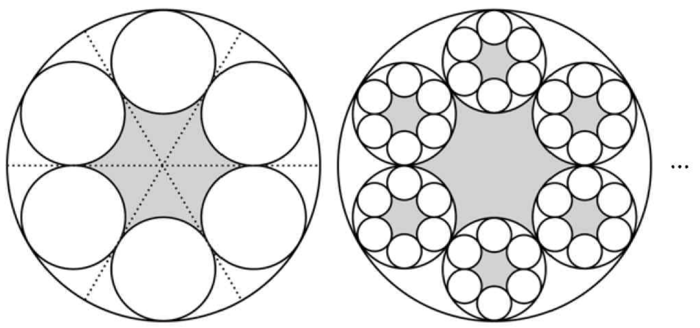
⋯

① $6\sqrt{3}$ ② $\frac{13}{2}\sqrt{3}$ ③ $7\sqrt{3}$
④ $\frac{15\sqrt{3}}{2}$ ⑤ $8\sqrt{3}$

[출처] 2015 모의_공공 교육청 고2 06월 18

[출처] 2015 모의_공공 교육청 고2 06월

77. 그림과 같이 반지름의 길이가 1인 원을 부채꼴로 6등분하여 각각의 부채꼴에 내접하는 원을 하나씩 그려 넣는다. 이 6개의 원에 의해 만들어지는 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자. 그림 R_1에 합동인 6개의 원 안에 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 만들어지는 6개의 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n = a\sqrt{3} + b\pi$이다. $a+b$의 값은? (단, a, b는 유리수이다.)



R_1 R_2 ⋯

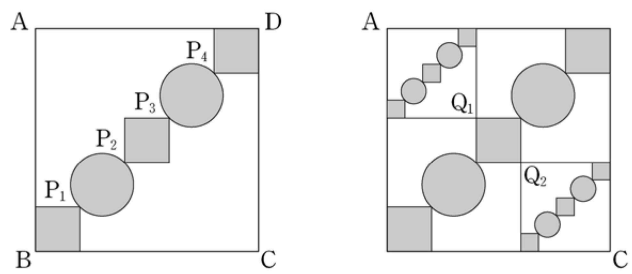
① $\frac{7}{6}$ ② $\frac{4}{3}$ ③ $\frac{3}{2}$

④ $\frac{5}{3}$ ⑤ $\frac{11}{6}$

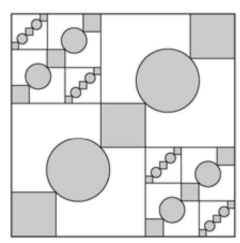
[출처] 2015 모의_공공 평가원 고3 11월

[출처] 2015 모의_공공 평가원 고3 11월

78. 그림과 같이 한 변의 길이가 5인 정사각형 ABCD의 대각선 BD의 5등분점을 점 B에서 가까운 순서대로 각각 P_1, P_2, P_3, P_4라 하고, 선분 BP_1, P_2P_3, P_4D를 각각 대각선으로 하는 정사각형과 선분 P_1P_2, P_2P_3를 각각 지름으로 하는 원을 그린 후, 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자. 그림 R_1에서 선분 P_2P_3을 대각선으로 하는 정사각형의 꼭짓점 중 점 A와 가장 가까운 점을 Q_1, 점 C와 가장 가까운 점을 Q_2라 하자. 선분 AQ_1을 대각선으로 하는 정사각형과 선분 CQ_2를 대각선으로 하는 정사각형을 그리고, 새로 그려진 2개의 정사각형 안에 그림 R_1을 얻는 것과 같은 방법으로 모양의 도형을 각각 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자. 그림 R_2에서 선분 AQ_1을 대각선으로 하는 정사각형과 선분 CQ_2를 대각선으로 하는 정사각형에 그림 R_1에서 그림 R_2를 얻는 것과 같은 방법으로 모양의 도형을 각각 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_3이라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은?



R_1 R_2



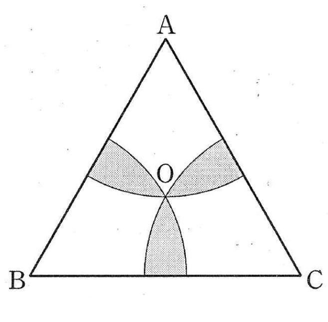
R_3 ⋯

① $\frac{24}{17}(\pi+3)$ ② $\frac{25}{17}(\pi+3)$ ③ $\frac{26}{17}(\pi+3)$

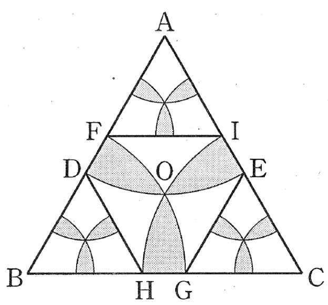
④ $\frac{24}{17}(2\pi+1)$ ⑤ $\frac{25}{17}(2\pi+1)$

[출처] 2015 모의_공공 평가원 고3 09월 20

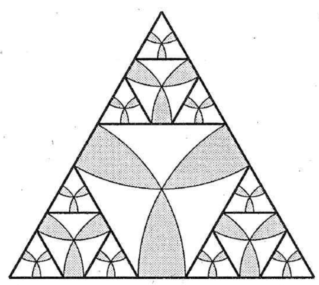
79. 그림과 같이 한 변의 길이가 6인 정삼각형 ABC가 있다. 정삼각형 ABC의 외심을 O라 할 때, 중심이 A이고 반지름의 길이가 $\overline{AO}$인 원을 O_A, 중심이 B이고 반지름의 길이가 $\overline{BO}$인 원을 O_B, 중심이 C이고 반지름의 길이가 $\overline{CO}$인 원을 O_C라 하자. 원 O_A와 원 O_B의 내부의 공통부분, 원 O_A와 원 O_C의 내부의 공통부분, 원 O_B와 원 O_C의 내부의 공통부분 중 삼각형 ABC 내부에 있는 ✿ 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자. 그림 R_1에 원 O_A가 두 선분 AB, AC와 만나는 점을 각각 D, E, 원 O_B가 두 선분 AB, BC와 만나는 점을 각각 F, G, O_C가 두 선분 BC, AC와 만나는 점을 각각 H, I라 하고, 세 정삼각형 AFI, BHD, CEG에서 R_1을 얻는 과정과 같은 방법으로 각각 만들어지는 ✿ 모양의 도형 3개에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자. 그림 R_2에 새로 만들어진 세 개의 정삼각형에 각각 R_1에서 R_2를 얻는 과정과 같은 방법으로 만들어지는 ✿ 모양의 도형 9개에 색칠하여 얻은 그림을 R_3이라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은?



R_1



R_2

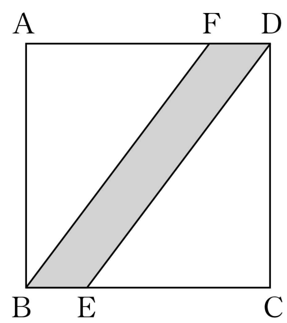

R_3

⋯

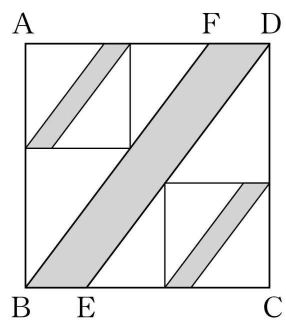
① $(2\pi-3\sqrt{3})(\sqrt{3}+3)$ ② $(\pi-\sqrt{3})(\sqrt{3}+3)$
③ $(2\pi-3\sqrt{3})(2\sqrt{3}+3)$ ④ $(\pi-\sqrt{3})(2\sqrt{3}+3)$
⑤ $(2\pi-2\sqrt{3})(\sqrt{3}+3)$

[출처] 2016 모의_공공 교육청 고3 10월 19

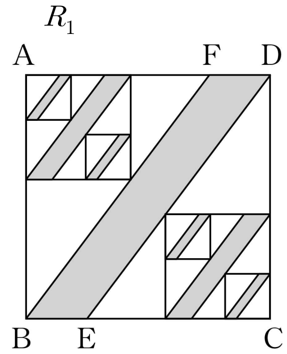
80. 한 변의 길이가 4인 정사각형 ABCD가 있다. 그림과 같이 선분 BC를 1 : 3으로 내분하는 점을 E, 선분 DA를 1 : 3으로 내분하는 점을 F라 하고 평행사변형 BEDF를 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자. 그림 R_1에서 정사각형 안에 있는 각 직각삼각형에 내접하는 가장 큰 정사각형을 각각 그리자. 새로 그려진 각 정사각형에 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 평행사변형을 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자. 그림 R_2에서 새로 그려진 정사각형 안에 있는 각 직각삼각형에 내접하는 가장 큰 정사각형을 각각 그리자. 새로 그려진 각 정사각형에 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 평행사변형을 색칠하여 얻은 그림을 R_3이라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 모든 평행사변형의 넓이의 합을 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은?



R_1



R_2



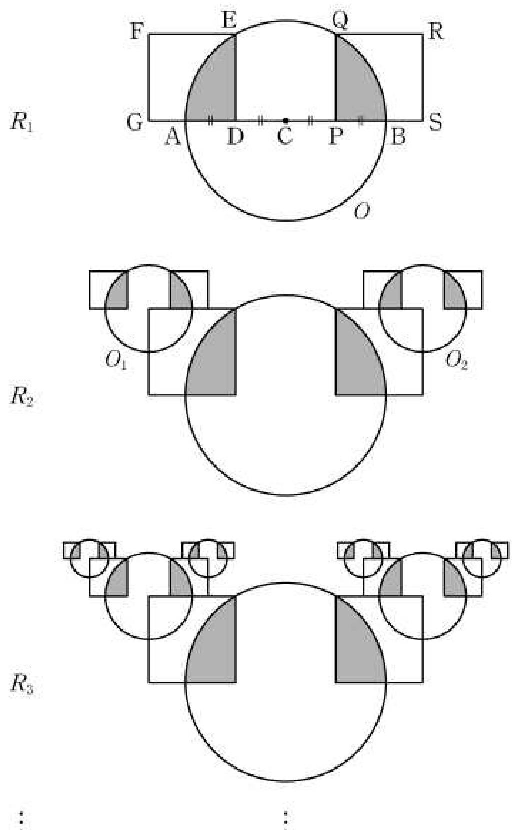
R_3

⋯

① $\frac{28}{5}$ ② $\frac{98}{17}$ ③ $\frac{196}{33}$
④ $\frac{49}{8}$ ⑤ $\frac{196}{31}$

[출처] 2016 모의_공공 평가원 고3 11월 17

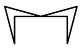
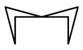
81. 그림과 같이 길이가 4인 선분 AB를 지름으로 하는 원 O가 있다. 원의 중심을 C라 하고, 선분 AC의 중점과 선분 BC의 중점을 각각 D, P라 하자. 선분 AC의 수직이등분선과 선분 BC의 수직이등분선이 원 O의 위쪽 반원과 만나는 점을 각각 E, Q라 하자. 선분 DE를 한 변으로 하고 원 O와 점 A에서 만나며 선분 DF가 대각선인 정사각형 DEFG를 그리고, 선분 PQ를 한 변으로 하고 원 O와 점 B에서 만나며 선분 PR가 대각선인 정사각형 PQRS를 그린다. 원 O의 내부와 정사각형 DEFG의 내부의 공통부분인 모양의 도형과 원 O의 내부와 정사각형 PQRS의 내부의 공통부분인 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자. 그림 R_1에서 점 F를 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\frac{1}{2}\overline{\mathrm{DE}}$인 원 O_1, 점 R를 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\frac{1}{2}\overline{\mathrm{PQ}}$인 원 O_2를 그린다. 두 원 O_1, O_2에 각각 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 만들어지는 모양의 2개의 도형과 모양의 2개의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은?

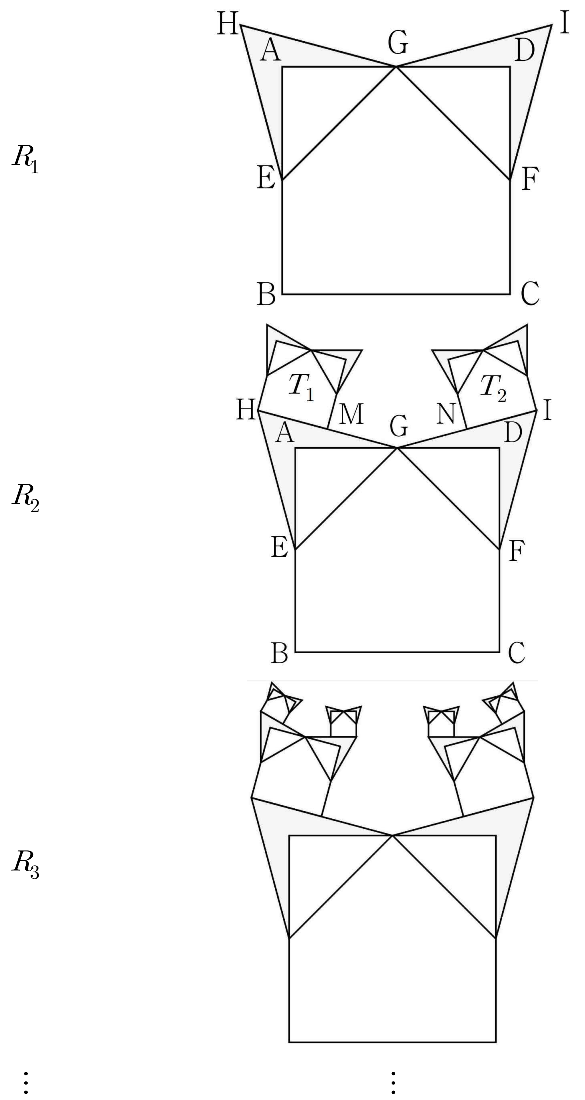


① $\frac{12\pi-9\sqrt{3}}{10}$ ② $\frac{8\pi-6\sqrt{3}}{5}$ ③ $\frac{32\pi-24\sqrt{3}}{15}$

④ $\frac{28\pi-21\sqrt{3}}{10}$ ⑤ $\frac{16\pi-12\sqrt{3}}{5}$

[출처] 2017 모의_공공 교육청 고3 04월 18

82. 그림과 같이 한 변의 길이가 4인 정사각형 ABCD에서 선분 AB, 선분 CD, 선분 DA의 중점을 각각 E, F, G라 하자. 선분 EG를 한 변으로 하고 점 A가 내부에 있도록 정삼각형 EGH를 그리고, 선분 GF를 한 변으로 하고 점 D가 내부에 있도록 정삼각형 GFI를 그린다. 두 정삼각형 EGH, GFI의 내부와 정사각형 ABCD의 외부의 공통부분인  모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자. 그림 R_1에서 선분 HG의 중점을 M, 선분 IG의 중점을 N이라 하고, 선분 HM을 한 변으로 하는 정사각형 T_1과 선분 IN을 한 변으로 하는 정사각형 T_2를 각각 정사각형 ABCD와 만나지 않게 그린다. 정사각형 T_1, T_2에 각각 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로  모양의 2개의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은?

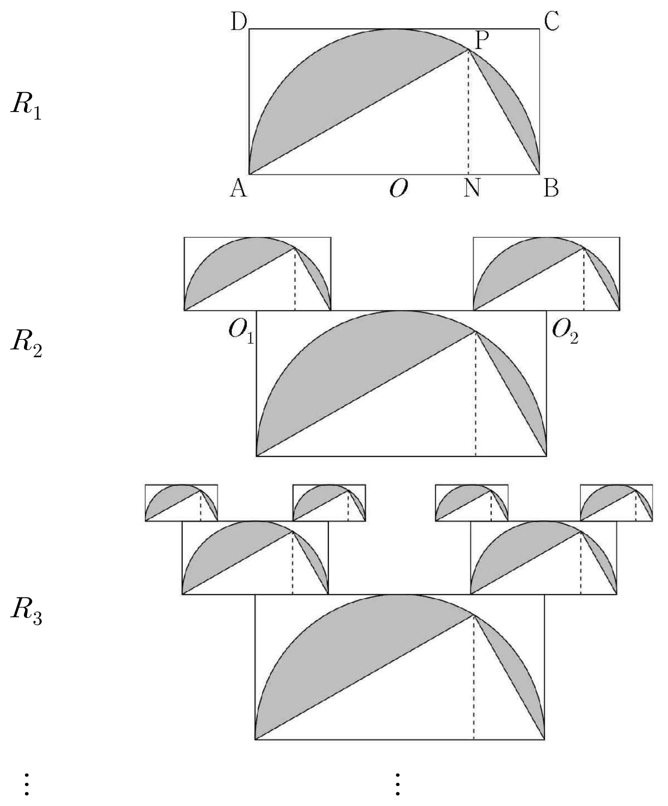


① $\frac{14}{3}(\sqrt{3}-1)$ ② $\frac{16}{3}(\sqrt{3}-1)$ ③ $6(\sqrt{3}-1)$ ④ $\frac{20}{3}(\sqrt{3}-1)$ ⑤ $\frac{22}{3}(\sqrt{3}-1)$

[출처] 2017 모의_공공 교육청 고2 06월 19

83. 길이가 4인 선분 AB를 지름으로 하는 반원 O가 있다. 그림과 같이 선분 AB를 한 변으로 하고 반원 O에 외접하는 직사각형 ABCD를 그린다. 선분 AB를 3 : 1로 내분하는 점을 N이라 하고, 점 N을 지나고 선분 AB와 수직인 직선이 반원 O와 만나는 점을 P라 하자. 반원 O의 내부와 삼각형 ABP의 외부의 공통부분인 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

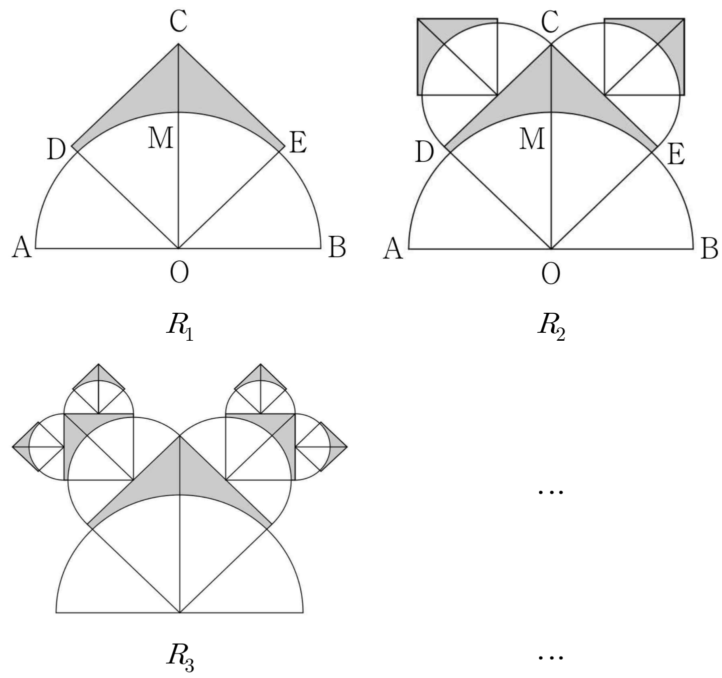
그림 R_1에서 점 D를 중심으로 하고 지름의 길이가 $\frac{1}{2}\overline{\mathrm{AB}}$인 반원 O_1, 점 C를 중심으로 하고 지름의 길이가 $\frac{1}{2}\overline{\mathrm{AB}}$인 반원 O_2를 지름이 직선 DC 위에 있도록 그린다.
두 반원 O_1, O_2에 각각 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 만들어지는 모양의 2개의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은?



① $3(\pi-\sqrt{3})$ ② $3(\pi-\sqrt{2})$ ③ $3(\pi-1)$
④ $4(\pi-\sqrt{3})$ ⑤ $4(\pi-\sqrt{2})$

[출처] 2017 모의_공공 사관학교 고3 07월 17

84. 그림과 같이 길이가 4인 선분 AB를 지름으로 하는 반원이 있다. 이 반원의 호 AB를 이등분하는 점을 M이라 하고 선분 OM을 3 : 1로 외분하는 점을 C라 하자. 선분 OC를 대각선으로 하는 정사각형 CDOE를 그리고, 정사각형의 내부와 반원의 외부의 공통부분인 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자. 그림 R_1에 두 선분 CD, CE를 각각 지름으로 하는 두 반원을 정사각형 CDOE의 외부에 그리고, 각각의 두 반원에서 그림 R_1을 얻는 것과 같은 방법으로 만들어지는 모양의 두 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은?

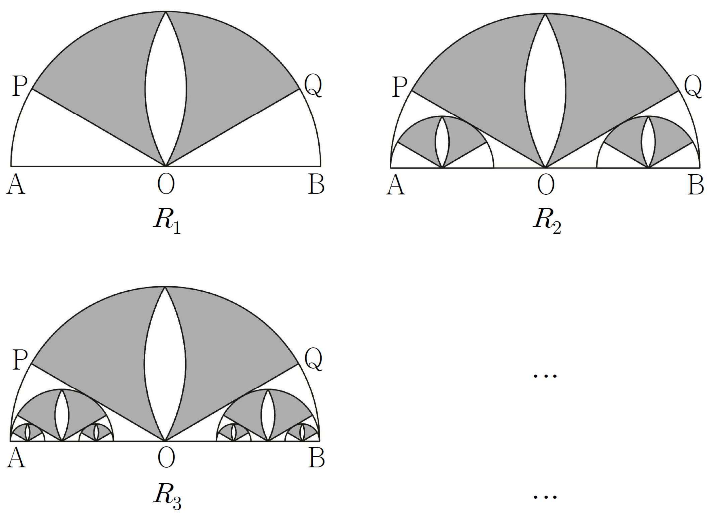


① $\frac{36-8\pi}{5}$ ② $\frac{58-12\pi}{7}$ ③ $\frac{72-16\pi}{7}$
④ $\frac{83-18\pi}{8}$ ⑤ $\frac{91-20\pi}{8}$

[출처] 2017 모의_공공 교육청 고2 09월 20

[출처] 2017 모의_공공 교육청 고2 09월 19

85. 그림과 같이 길이가 4인 선분 AB를 지름으로 하는 반원이 있다. 선분 AB의 중점을 O라 하고, 호 AB 위에 두 점 P, Q를 $\angle POA = \angle BOQ = 30^\circ$ 가 되도록 잡는다. 부채꼴 POQ의 내부에서 점 P를 중심으로 하고 선분 PO를 반지름으로 하는 원의 내부와 점 Q를 중심으로 하고 선분 QO를 반지름으로 하는 원의 내부의 공통부분을 제외한 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자. 그림 R_1에서 지름의 양 끝점이 선분 AB 위에 있고 선분 PO와 선분 QO에 각각 접하는 가장 큰 반원을 그린다. 새로 그려진 2개의 반원에 그림 R_1을 얻는 것과 같은 방법으로 모양의 도형을 각각 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은?

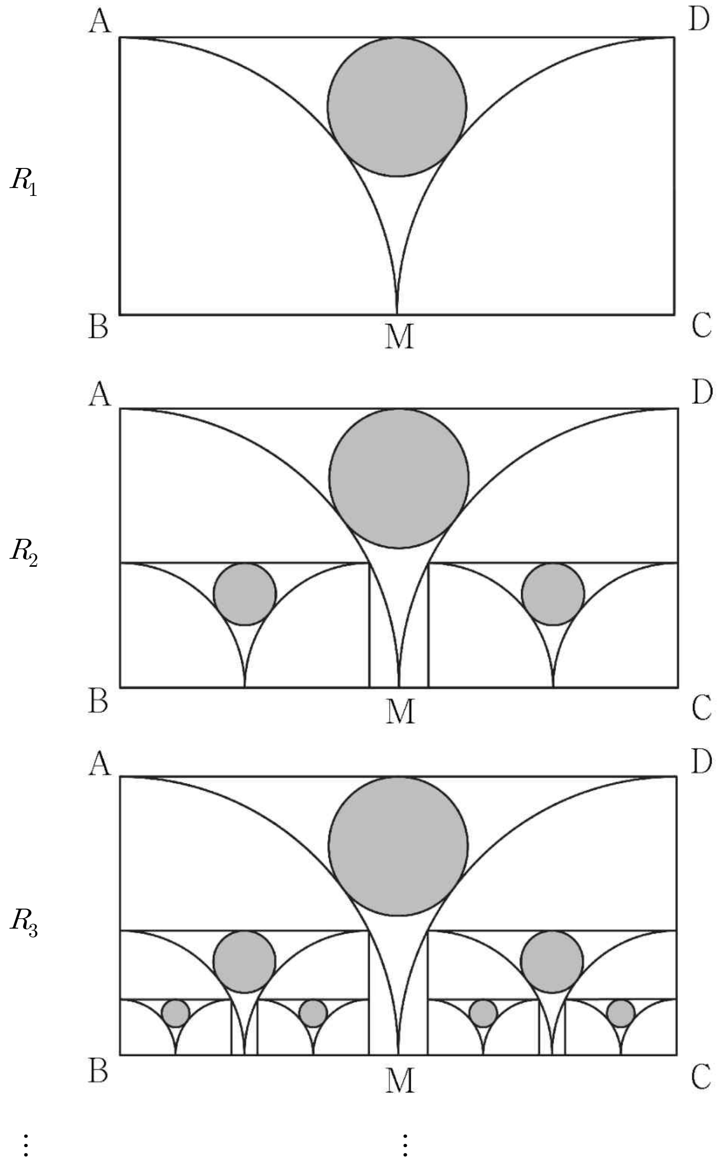


① $\frac{15\sqrt{3}}{7}$ ② $\frac{16\sqrt{3}}{7}$ ③ $\frac{17\sqrt{3}}{7}$

④ $\frac{18\sqrt{3}}{7}$ ⑤ $\frac{19\sqrt{3}}{7}$

[출처] 2018 모의_공공 교육청 고2 09월 20

86. 그림과 같이 $\overline{AB}=1$, $\overline{BC}=2$인 직사각형 ABCD에서 선분 BC의 중점을 M이라 하자. 중심이 B, 반지름의 길이가 $\overline{BM}$이고 중심각의 크기가 90° 인 부채꼴 BMA를 그리고, 중심이 C, 반지름의 길이가 $\overline{CD}$이고 중심각의 크기가 90° 인 부채꼴 CDM을 그린다. 두 부채꼴의 호 MA, 호 DM과 선분 AD에 모두 접하는 원의 내부에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자. 그림 R_1에서 새로 그려진 각 부채꼴의 내부에 두 변의 길이의 비가 $1:2$인 직사각형을 긴 변이 선분 BC 위에 놓이면서 각 부채꼴에 내접하도록 각각 그리고, 각 직사각형에 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 만들어지는 원의 내부에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림을 R_n이라 할 때, 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 하자. 이때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은?

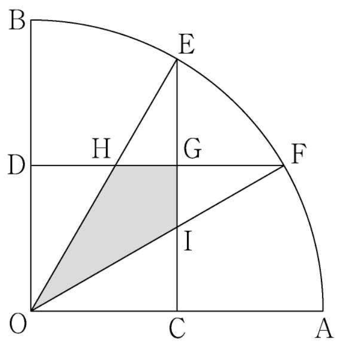


① $\frac{1}{12}\pi$ ② $\frac{5}{48}\pi$ ③ $\frac{1}{8}\pi$

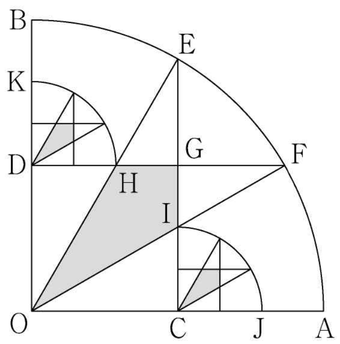
④ $\frac{7}{48}\pi$ ⑤ $\frac{1}{6}\pi$

[출처] 2019 모의_공공 평가원 고3 09월 18

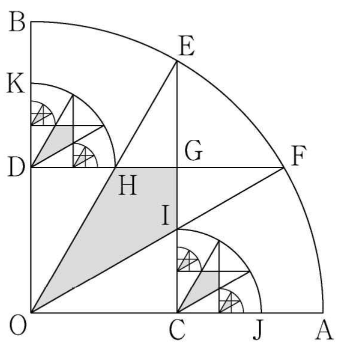
87. 그림과 같이 중심이 O, 반지름의 길이가 2이고 중심각의 크기가 $90°$인 부채꼴 OAB가있다. 선분 OA의 중점을 C, 선분 OB의 중점을 D라 하자. 점 C를 지나고 선분 OB와 평행한 직선이 호 AB와 만나는 점을 E, 점 D를 지나고 선분 OA와 평행한 직선이 호 AB와 만나는 점을 F라 하자. 선분 CE와 선분 DF가 만나는 점을 G, 선분 OE와 선분 DG가 만나는 점을 H, 선분 OF와 선분 CG가 만나는 점을 I라 하자. 사각형 OIGH를 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자. 그림 R_1에 중심이 C, 반지름의 길이가 $\overline{\mathrm{CI}}$, 중심각의 크기가 $90°$인 부채꼴 CJI와 중심이 D, 반지름의 길이가 $\overline{\mathrm{DH}}$, 중심각의 크기가 $90°$인 부채꼴 DHK를 그린다. 두 부채꼴 CJI, DHK에 그림 R_1을 얻는 것과 같은 방법으로 두 개의 사각형을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은?



R_1



R_2



R_3

⋯

⋯

① $\frac{2(3-\sqrt{3})}{5}$ ② $\frac{7(3-\sqrt{3})}{15}$ ③ $\frac{8(3-\sqrt{3})}{15}$

④ $\frac{3(3-\sqrt{3})}{5}$ ⑤ $\frac{2(3-\sqrt{3})}{3}$

무등비도형 다 모아봄2(빠른 정답)

프로젝트 2023.01.02

1. [정답] ⑤
2. [정답] ②
3. [정답] ②
4. [정답] ③
5. [정답] ②

6. [정답] ①
7. [정답] ①
8. [정답] ②
9. [정답] ②
10. [정답] ②

11. [정답] 12
12. [정답] ④
13. [정답] ②
14. [정답] ③
15. [정답] ②

16. [정답] ②
17. [정답] 5
18. [정답] ⑤
19. [정답] ①
20. [정답] ④

21. [정답] ④
22. [정답] ③
23. [정답] ②
24. [정답] ③
25. [정답] ①

26. [정답] ①
27. [정답] ①
28. [정답] ①
29. [정답] ③
30. [정답] ②

31. [정답] ①
32. [정답] ②
33. [정답] ②
34. [정답] ①
35. [정답] ④

36. [정답] ②
37. [정답] ④
38. [정답] ②
39. [정답] ①
40. [정답] ②

41. [정답] ④
42. [정답] ③
43. [정답] ②
44. [정답] ④
45. [정답] ①

46. [정답] ⑤
47. [정답] ②
48. [정답] ⑤
49. [정답] ③
50. [정답] ③

51. [정답] ②
52. [정답] ③
53. [정답] ④
54. [정답] ②
55. [정답] ②

56. [정답] 13
57. [정답] 6
58. [정답] ⑤
59. [정답] ①
60. [정답] ④

61. [정답] ⑤
62. [정답] ⑤
63. [정답] ①
64. [정답] 59
65. [정답] ②

66. [정답] ③
67. [정답] ②
68. [정답] ②
69. [정답] ④
70. [정답] ④

71. [정답] ②
72. [정답] ③

73. [정답] ③
74. [정답] ③
75. [정답] ②

76. [정답] ①
77. [정답] ②
78.[정답] ②
79. [정답] ③
80. [정답] ⑤

81. [정답] ③
82. [정답] ②
83. [정답] ④
84. [정답] ③
85. [정답] ④

86. [정답] ②
87. [정답] ①

무등비도형 다 모아봄2(해설)

프로젝트 2023.01.02

1) [정답] ⑤

[해설]

A_1의 한 변의 길이를 x라고 하면 피타고라스 정리에 의해

$x=\dfrac{2}{\sqrt{5}}a$ 이므로

A_1의 넓이$=\dfrac{4}{5}a^2$ 이다. 마찬가지 방법으로

A_2의 넓이$=\dfrac{16}{25}a^2$

⋮

A_n의 넓이$=\left(\dfrac{4}{5}\right)^n a^2$

따라서, 넓이의 합은 $\dfrac{\frac{4}{5}a^2}{1-\frac{4}{5}}=4a^2$이다.

2) [정답] ②

[해설]

$S_n=\dfrac{1}{2}\cdot 2^2\cdot \angle \mathrm{AOP}_n$ 이므로 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=2\lim\limits_{n\to\infty}\angle \mathrm{AOP}_n$

한편, $\angle \mathrm{AOP}_1=\dfrac{\pi}{2}$, $\angle \mathrm{AOP}_2=\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{4}$,

$\angle \mathrm{AOP}_3=\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\pi}{8}$, $\angle \mathrm{AOP}_4=\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{\pi}{16}$,

⋮

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}\angle \mathrm{AOP}_n=\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{\pi}{16}-\dots=\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\frac{\pi}{4}}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}$

$=\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{2\pi}{3}$ 따라서, $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=2\lim\limits_{n\to\infty}\angle \mathrm{AOP}_n=\dfrac{4\pi}{3}$

3) [정답] ②

[해설]

원 O_n, O_{n+1}의 반지름을 각각 r_n, r_{n+1}이라 하면

그림에서 사각형 PO_nQO_{n+1}은 정사각형이므로

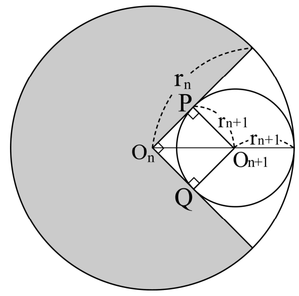
$\overline{\mathrm{O}_n\mathrm{O}_{n+1}}=r_n-r_{n+1}=\sqrt{2}r_{n+1}$에서 $r_{n+1}=(\sqrt{2}-1)r_n$이다.

따라서 부채꼴 A_n과 부채꼴 A_{n+1}은

닮은 도형이고 그 닮음비가

$1:(\sqrt{2}-1)$이므로

$\dfrac{S_{n+1}}{S_n}=(\sqrt{2}-1)^2=3-2\sqrt{2}$ 이다.



또 $S_1=\dfrac{3}{4}\pi$이므로

S_1, S_2, S_3,⋯ 는

첫째항이 $\dfrac{3}{4}\pi$, 공비가 $3-2\sqrt{2}$ 인 무한등비수열이다.

$\therefore \sum\limits_{n=1}^{\infty}S_n=\dfrac{\frac{3}{4}\pi}{1-(3-2\sqrt{2})}=\dfrac{(3\sqrt{2}+3)\pi}{8}$

4) [정답] ③

[해설]

부채꼴의 반지름을 R_n, 원뿔의 밑면의 반지름을 r_n이라 하면

$\dfrac{3}{4}\cdot 2\pi R_n=2\pi r_n$, $r_n=\dfrac{3}{4}R_n$

원뿔의 모선이 R_n이므로 (높이)$=\sqrt{1-\dfrac{9}{16}}R_n=\dfrac{\sqrt{7}}{4}R_n$

$\therefore\ V_n=\dfrac{1}{3}\pi\left(\dfrac{3}{4}R_n\right)^2\cdot\dfrac{\sqrt{7}}{4}R_n=\dfrac{3\sqrt{7}}{64}R_n^3\,\pi$

한편, $\{R_n\}$은 첫째항이 4, 공비가 $\dfrac{1}{2}$인 등비수열

$\{V_n\}$은 첫째항이 $3\sqrt{7}\pi$, 공비가 $\dfrac{1}{8}$인 등비수열

$\therefore \sum\limits_{n=1}^{\infty}V_n=\dfrac{3\sqrt{7}\pi}{1-\frac{1}{8}}=\dfrac{24\sqrt{7}}{7}\pi$

5) [정답] ②

[해설]

사각형 $\mathrm{A}_1\mathrm{B}_1\mathrm{C}_1\mathrm{D}_1$의 한 변의 길이를 a라 하자.

이 때, $\overline{AB_1}=\frac{1}{2}+\frac{a}{2}$, $\overline{B_1C_1}=a$, $\overline{AC_1}=1$이므로 직각삼각형

AB_1C_1에서 $\left(\frac{1}{2}+\frac{a}{2}\right)^2+a^2=1^2$

$$\frac{5}{4}a^2+\frac{a}{2}-\frac{3}{4}=0$$

$$5a^2+2a-3=(5a-3)(a+1)=0$$

$$\therefore\ a=\frac{3}{5}\ (\because\ a>0)$$

따라서 정사각형 $A_nB_nC_nD_n$의 한 변의 길이를 a_n이라 하면 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 $\frac{3}{5}$, 공비가 $\frac{3}{5}$인 등비수열임을 알 수 있다.

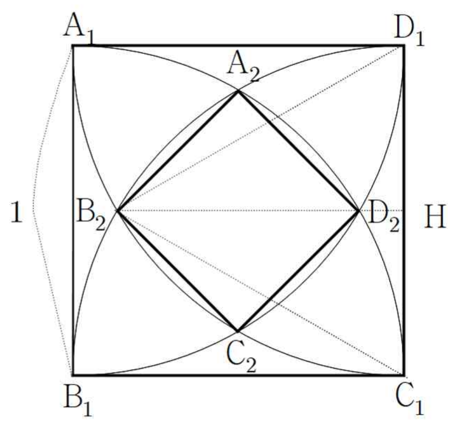
따라서 수열 $\{S_n\}$은 첫째항이 $\frac{9}{25}$, 공비가 $\frac{9}{25}$인

등비수열이므로 $\sum_{n=1}^{\infty}S_n=\dfrac{\frac{9}{25}}{1-\frac{9}{25}}=\frac{9}{16}$

6) [정답] ①

[해설]

닮은 도형의 넓이의 합을 구하는 문제이므로 닮음비를 이용하면 된다. 한 변의 길이가 1 인 정사각형의 각 꼭짓점에서 반지름이 1 인 사분원을 그렸을 때 만나는 교점 A_1, B_1, C_1, D_1 으로 이루어지는 사각형은 정사각형이다.



오른쪽 그림에서 점 B_2 에서 선분 C_1D_1 에 내린 수선의 발을 H 라 하면 $\overline{C_1H}=\frac{1}{2}$, $\overline{B_2C_1}=1$ 이므로 $\overline{B_2H}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 이다.

따라서 정사각형 $A_2B_2C_2D_2$ 의 대각선의 길이는

$\frac{\sqrt{3}}{2}-\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\sqrt{3}-1$, 한 변의 길이는 $\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}$ 이다.

따라서 정사각형 $A_2B_2C_2D_2$ 의 넓이는 $2-\sqrt{3}$ 이다. 그러므로 수열 $\{S_n\}$ 은 초항 1 , 공비가 $2-\sqrt{3}$ 인 등비수열이고, 무한등비급수의 합 S 는

$$S=\frac{1}{1-(2-\sqrt{3})}=\frac{1}{\sqrt{3}-1}=\frac{\sqrt{3}+1}{2}$$

7) [정답] ①

[해설]

정육각형 H_n 의 한 변의 길이를 a_n 이라 하면

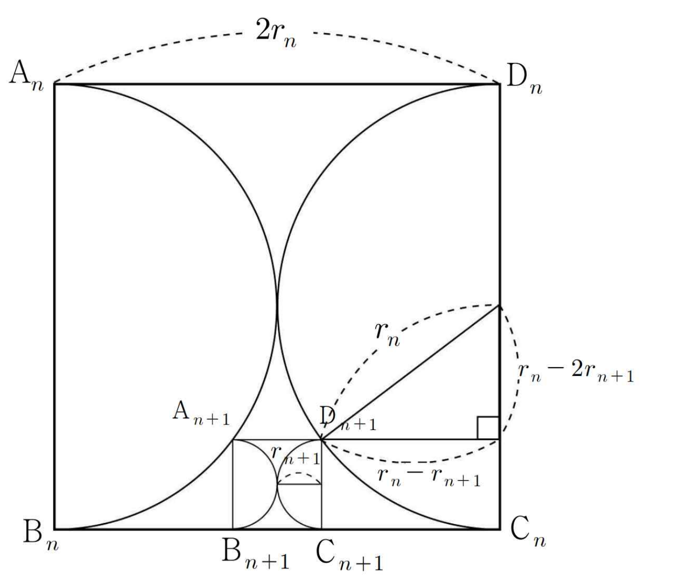
$$a_{n+1}{}^2=\frac{a_n{}^2}{2}+\frac{a_n{}^2}{2}-2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a_n\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a_n\right)\cos 30°$$

$$a_{n+1}{}^2=\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)a_n{}^2\quad \therefore\ \sum_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{2\sqrt{3}}{3}S_1$$

8) [정답] ②

[해설]

그림에서



$r_n^2=(r_n-r_{n+1})^2+(r_n-2r_{n+1})^2$이므로

$$5r_{n+1}^2-6r_nr_{n+1}+r_n^2=0\Leftrightarrow(5r_{n+1}-r_n)(r_{n+1}-r_n)=0$$

$$\therefore\ r_{n+1}=\frac{1}{5}r_n\quad \therefore\ S_{n+1}=2\times\frac{1}{2}\times\pi r_{n+1}^2=\frac{1}{25}\times\pi r_n^2=\frac{1}{25}S_n$$

수열 $\{S_n\}$은 $S_1=2\times\frac{1}{2}\times\pi\times1^2=\pi$이고,

공비가 $\frac{1}{25}$인 등비수열이므로 $\sum_{n=1}^{\infty}S_n=\dfrac{\pi}{1-\frac{1}{25}}=\frac{25}{24}\pi$

9) [정답] ②

[해설]

$S_1 = \dfrac{\pi-2}{8}$, $S_2 = \dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{\pi-2}{8}$, $S_3 = \left(\dfrac{1}{4}\right)^2\cdot\dfrac{\pi-2}{8}$

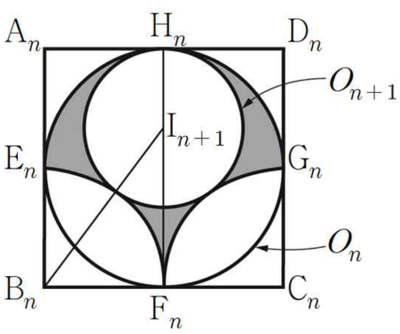
$\vdots$

$S_n = \left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}\cdot\dfrac{\pi-2}{8}$ 이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(3^{n-1}\cdot S_n\right)= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}\cdot\frac{\pi-2}{8} = \frac{\frac{\pi-2}{8}}{1-\frac{3}{4}} = \frac{\pi-2}{2}$$

10) [정답] ②

[해설]



원 O_{n+1}의 중심을 I_{n+1}이라 하고 반지름의 길이를 r_{n+1}이라 하면 직각삼각형 $I_{n+1}B_nF_n$에서
피타고라스의 정리에 의해

$(r_n + r_{n+1})^2 = (2r_n - r_{n+1})^2 + r_n^2$

$2r_n r_{n+1} = 4r_n^2 - 4r_n r_{n+1}$

$\dfrac{r_{n+1}}{r_n} = \dfrac{2}{3}$ 이므로 $\dfrac{S_{n+1}}{S_n} = \dfrac{4}{9}$

$\dfrac{r_2}{r_1} = \dfrac{2}{3}$ 이므로 $S_1 = 4 - \left(2 + \left(\dfrac{2}{3}\right)^2\pi\right) = 2 - \dfrac{4}{9}\pi$

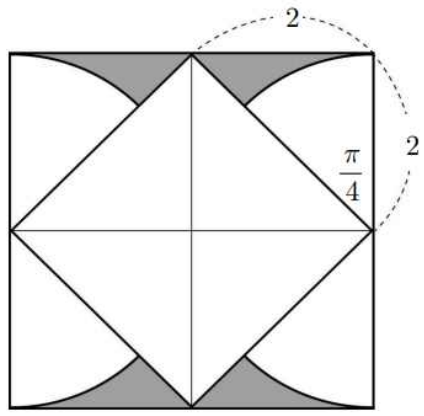
$\therefore \{S_n\}$은 첫째항이 $2-\dfrac{4}{9}\pi$, 공비가 $\dfrac{4}{9}$ 인

무한등비수열이다.

따라서 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{2-\frac{4}{9}\pi}{1-\frac{4}{9}} = \frac{18-4\pi}{5}$

11) [정답] 12

[해설]



$S_1 = 4\left(\dfrac{1}{2}\cdot 2\cdot 2 - \dfrac{1}{2}\cdot 2^2\cdot\dfrac{\pi}{4}\right) = 8 - 2\pi$

정사각형 모양 의 닮은 그림들을 크기순으로 나열할 때 인접하는 두 그림의 닮음비는

$4 : 2\sqrt{2} = 2 : \sqrt{2}$ 이고 넓이의 비는 $2:1$이다.

$S_2 = S_1 + (8-2\pi)\cdot\dfrac{1}{2} = (8-2\pi) + (8-2\pi)\cdot\dfrac{1}{2}$

$S_3 = S_2 + (8-2\pi)\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 = (8-2\pi) + (8-2\pi)\cdot\dfrac{1}{2} + (8-2\pi)\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^2$

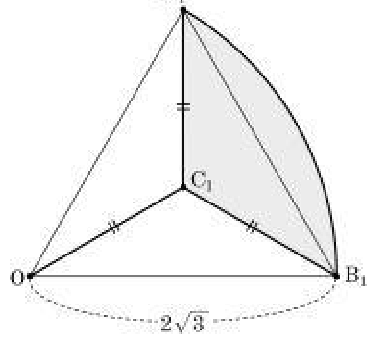
$S_n = (8-2\pi) + (8-2\pi)\cdot\dfrac{1}{2} + \cdots + (8-2\pi)\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \sum_{n=1}^{\infty}(8-2\pi)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{8-2\pi}{1-\frac{1}{2}} = 16 - 4\pi$$

$\therefore p+q = 16-4 = 12$

12) [정답] ④

[해설]



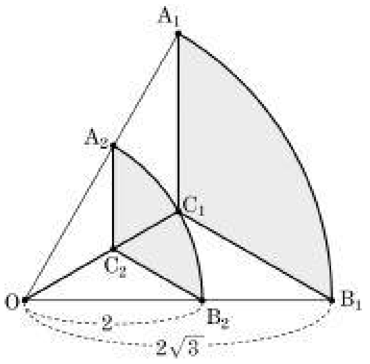
점 C_1은 정삼각형 A_1OB_1의 무게중심이므로 삼각형 A_1OC_1의 넓이와 삼각형 C_1OB_1의 넓이는 각각 삼각형 A_1OB_1의 넓이의 $\dfrac{1}{3}$ 이다. 따라서 삼각형 C_1OB_1의 넓이는

$\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{4}\cdot(2\sqrt{3})^2 = \sqrt{3}$ 이다.

S_1은 부채꼴 A_1OB_1의 넓이에서 두 삼각형 A_1OC_1, C_1OB_1의

넓이를 뺀 값이므로

$S_1=\frac{1}{2}\cdot(2\sqrt{3})^2\cdot\frac{\pi}{3}-2\sqrt{3}=2\pi-2\sqrt{3}$



부채꼴 A_1OB_1과 부채꼴 A_2OB_2의 닮음비는

$2\sqrt{3}:2=\sqrt{3}:1$이므로 넓이의 비는 $3:1$이다.

따라서 수열 $\{S_n\}$은 첫째항이 $2\pi-2\sqrt{3}$, 공비가 $\frac{1}{3}$인

등비수열이다.

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{2\pi-2\sqrt{3}}{1-\frac{1}{3}}=3\pi-3\sqrt{3}$

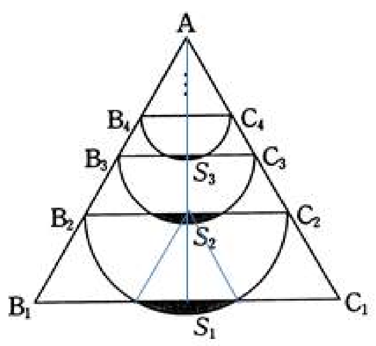
13) [정답] ②

[해설]

길이 닮음비는 $\overline{B_1B_2}:\overline{B_2B_3}=3:2$이다.

그러므로 넓이 닮음비는 $9:4$가 되어,

공비는 $\frac{4}{9}$이다.



위의 그림에서

$\overline{B_1C_1}$의 중점을 D_1, $\overline{B_2C_2}$의 중점을 D_2라고

할 때, 삼각형 AB_1C_1이 정삼각형이므로,

$\overline{AD_1}=3\sin\frac{\pi}{3}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$이고, $\overline{AD_2}:\overline{AD_1}=2:1$이므로,

$\overline{D_1D_2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$가 된다.

$\overline{B_2C_2}$를 지름으로 하는 반원과 $\overline{B_1C_1}$와 만나는 두 점을 각각

E_1, F_1이라 하면, $\overline{D_1D_2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\overline{D_2F_1}=\overline{D_2C_2}=1$이므로,

$\angle F_1D_2D_1=\frac{\pi}{6}$이 된

다. 따라서 삼각형 $D_2E_1F_1$도 정삼각형이 된다.

S_1의 넓이는 부채꼴$D_2E_1F_1$ 에서 정삼각형$D_2E_1F_1$을 빼서

구할 수 있으므로, $S_1=\frac{1}{2}1^2\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}1^2=\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{4}$

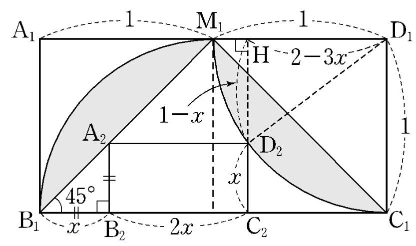
그러므로, 구하고자 하는 무한등비급수

$\sum_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{4}}{1-\frac{4}{9}}=\frac{6\pi-9\sqrt{3}}{20}$이 된다.

14) [정답] ③

[해설]

무한등비급수 $S=\frac{a}{1-r}$를 구한다.



R_1의 넓이 $a=\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\right)\times 2=\frac{\pi}{2}-1$

공비 r를 구하기 위해 먼저 길이의 닮음비 $\frac{\overline{C_2D_2}}{\overline{C_1D_1}}$를 구한다.

$\overline{C_2D_2}=x$라 두면 D_2에서 $\overline{A_1D_1}$에서 내린 수선의 발을 H라

하자. $\overline{B_1M_1}$과 $\overline{B_1C_1}$이 이루는 각이 $45°$이므로

$\overline{B_1B_2}=\overline{A_2B_2}=x$, $\overline{B_2C_2}=2x$, $\overline{HD_1}=2-3x$, $\overline{HD_2}=1-x$가

되고$\overline{HD_1}^2+\overline{HD_2}^2=\overline{D_1D_2}^2=1$에서 $(2-3x)^2+(1-x)^2=1$

$\Leftrightarrow 5x^2-7x+2=0 \Leftrightarrow (5x-2)(x-1)=0 \therefore x=\frac{2}{5}, 1$

$x\neq 1$이므로 $x=\frac{2}{5}$ 따라서, 넓이의 비는 $\frac{4}{25}$이고, 이것이

공비가 된다. $\therefore S=\frac{\frac{\pi}{2}-1}{1-\frac{4}{25}}=\frac{25}{21}\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$

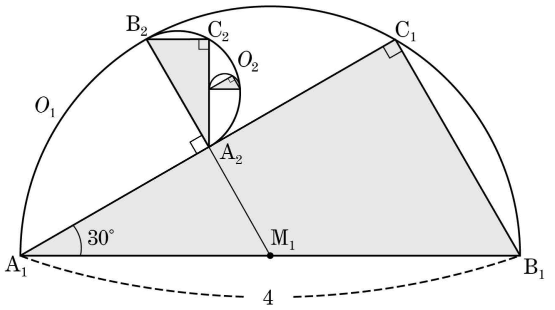
15) [정답] ②

[해설]

점 C_1이 반원 O_1 위에 있으므로 삼각형 $A_1B_1C_1$은 선분 A_1B_1이 빗변인 직각삼각형이다.

따라서 $\overline{A_1C_1}=4\cos30°=2\sqrt{3}$, $\overline{B_1C_1}=4\sin30°=2$이다.

$\therefore\ S_1=\frac{1}{2}\times2\sqrt{3}\times2=2\sqrt{3}$



이때 반원 O_1의 지름의 중점을 M_1이라 하면 선분 A_2B_2는 선분 A_1C_1의 수직이등분선이고 현의 수직이등분선은 원의 중심을 지나므로 선분 A_2B_2의 연장선은 반원 O_1의 지름의 중점 M_1을 지난다. $\overline{M_1A_2}=2\sin30°=1$이므로 $\overline{A_2B_2}=2-1=1$

$S_2=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{8}$ 마찬가지로, 삼각형 $A_nB_nC_n$은 $\overline{A_nB_n}$이 빗변인 직각삼각형이고, 삼각형 $A_{n-1}B_{n-1}C_{n-1}$의 빗변은 $\overline{A_{n-1}B_{n-1}}=\frac{1}{4}\times\overline{A_nB_n}$ 두 닮은 삼각형의 길이의 비는 $4:1$이므로 넓이의 비는 $16:1$이다. 따라서 $\{S_n\}$은 첫째항이 $2\sqrt{3}$이고 공비가 $\frac{1}{16}$인 등비수열이다.

$$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{2\sqrt{3}}{1-\frac{1}{16}}=\frac{32\sqrt{3}}{15}$$

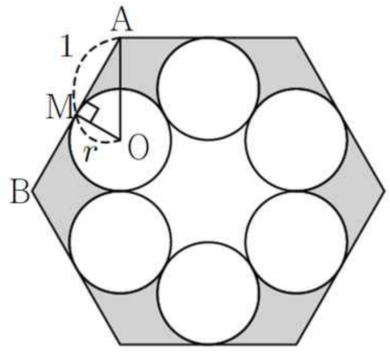
16) [정답] ②

[해설]

A_n의 한 변의 길이를 a_n이라 할 때,

A_{n+1}의 한 변의 길이 a_{n+1}은 $a_{n+1}=a_n\times\tan\frac{\pi}{6}=\frac{1}{\sqrt{3}}a_n$

따라서 $S_2-S_1=\frac{1}{3}S_1$, $S_{n+2}-S_{n+1}=\frac{1}{3}(S_{n+1}-S_n)(n\geq1)$



정육각형 A_1의 한 변 AB의 중점을 M, 점 M을 접점으로 하는 원의 중심을 O라 하자. 그림 R_1에서 각 원의 반지름을 r라 하면 $\angle OAM=\frac{\pi}{6}$이므로 $r=\tan\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

$$S_1=\left\{\sqrt{3}-\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2\pi\right\}\times\frac{2}{3}\times6=4\sqrt{3}-\frac{4\pi}{3}$$

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\left(4\sqrt{3}-\frac{4\pi}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}$$

그러므로 $\lim_{n\to\infty}S_n=\dfrac{4\sqrt{3}-\frac{4\pi}{3}}{1-\frac{1}{3}}=6\sqrt{3}-2\pi$

17) [정답] 5

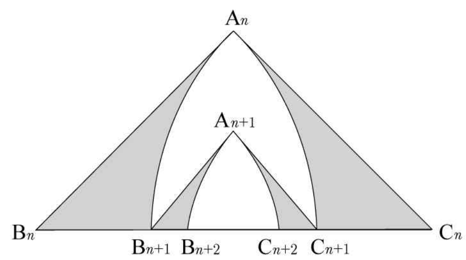
[해설]

$S_1=2\{($삼각형 $A_1B_1C_1$의 넓이$)-($부채꼴 $B_1A_1C_2$의 넓이$)\}$

$=2\left(4-\frac{1}{2}\cdot8\cdot\frac{\pi}{4}\right)=2(4-\pi)$

$S_2=2\{($삼각형 $A_2B_2C_2$의 넓이$)-($부채꼴 $B_2A_2C_3$의 넓이$)\}$

$=2(4-\pi)(\sqrt{2}-1)^2$



$\overline{B_nC_n}=2l_n$, $\overline{B_{n+1}C_{n+1}}=2l_{n+1}$이라 하면

$\overline{A_nB_n}=\overline{B_nC_{n+1}}=\sqrt{2}l_n$이고$\frac{1}{2}\overline{B_nC_n}+\frac{1}{2}\overline{B_{n+1}C_{n+1}}=\overline{B_nC_{n+1}}$

이므로 $l_n+l_{n+1}=\sqrt{2}l_n\Leftrightarrow l_{n+1}=(\sqrt{2}-1)l_n$

$S_{n+1}=(\sqrt{2}-1)^2S_n$

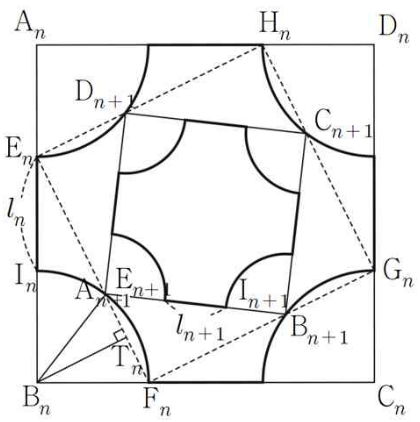
$$\frac{1}{4-\pi}\sum_{n=1}^{\infty}S_n = \frac{1}{4-\pi}\cdot\frac{2(4-\pi)}{1-(\sqrt{2}-1)^2} = 1+\sqrt{2}$$

$\therefore a=1,\ b=2$ 따라서 $a^2+b^2=5$

18) [정답] ⑤

[해설]

그림과 같이 정사각형 $A_nB_nC_nD_n$에서 점 B_n을 중심으로 하고 선분 B_nF_n을 반지름으로 하는 사분원이 선분 A_nB_n과 만나는 점을 I_n이라 하고, $\overline{E_nI_n}=l_n$이라 하자.



$\overline{B_nF_n}=l_n$, $\overline{E_nB_n}=2l_n$이므로 $\overline{E_nF_n}=\sqrt{5}\,l_n$

점 B_n에서 선분 F_nA_{n+1}에 내린 수선의 발을 T_n이라 하자.

$\triangle B_nF_nT_n \backsim \triangle E_nF_nB_n$이므로 $\overline{B_nF_n} : \overline{F_nT_n} = \overline{E_nF_n} : \overline{F_nB_n}$

$$\therefore \overline{F_nT_n} = \frac{(\overline{B_nF_n})^2}{\overline{E_nF_n}} = \frac{\sqrt{5}}{5}l_n$$

$\triangle B_nF_nA_{n+1}$이 이등변삼각형이므로

$$\overline{F_nA_{n+1}} = 2\overline{F_nT_n} = \frac{2\sqrt{5}}{5}l_n$$

$$\overline{A_{n+1}E_n} = \overline{E_nF_n} - \overline{F_nA_{n+1}} = \frac{3\sqrt{5}}{5}l_n$$

$\triangle A_{n+1}E_nD_{n+1} \equiv \triangle B_{n+1}F_nA_{n+1}$이므로

$\overline{F_nB_{n+1}} = \frac{3\sqrt{5}}{5}l_n$, $\overline{A_{n+1}B_{n+1}} = \frac{\sqrt{65}}{5}l_n$

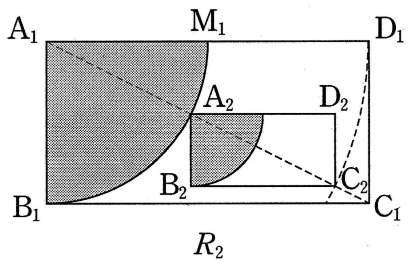
$l_{n+1} = \frac{1}{3}\overline{A_{n+1}B_{n+1}} = \frac{\sqrt{65}}{15}l_n$이므로 $S_{n+1} = \frac{13}{45}S_n$

그러므로 수열 $\{S_n\}$은 $S_1=9-\pi$이고, 공비가 $\frac{13}{45}$인 등비수열이다. 따라서 $\sum_{n=1}^{\infty}S_n = \frac{9-\pi}{1-\frac{13}{45}} = \frac{45}{32}(9-\pi)$

19) [정답] ①

[해설]

$S_1 = \frac{\pi}{4}$



$\overline{A_2C_2} = \overline{A_1C_2} - 1 = 1$이므로 $\overline{A_2B_2} = \frac{1}{\sqrt{5}}$이다.

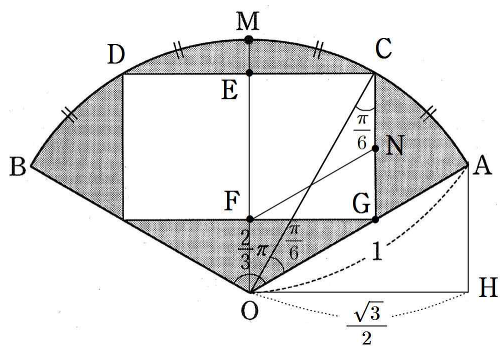
따라서 닮음인 두 도형의 길이 비는

$\overline{A_1B_1} : \overline{A_2B_2} = 1 : \frac{1}{\sqrt{5}}$이므로 넓이 비는 $1:\frac{1}{5}$이다. 즉, 공비는 $\frac{1}{5}$이다.

$$\therefore \lim_{n\to\infty}S_n = \frac{\frac{\pi}{4}}{1-\frac{1}{5}} = \frac{5}{16}\pi$$

20) [정답] ④

[해설]



처음 직사각형의 넓이 $= \overline{CD}\times\overline{CG}$

$\overline{CE} = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, $\overline{CD}=1$

$\triangle FOG$에서 $\overline{OG} = \frac{1}{2}\operatorname{cosec}\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$$\therefore \overline{OG} = \overline{CG}\ \left(\because \angle COG = \angle GCO = \frac{\pi}{6}\right)$$

$$\therefore S_1 = \frac{1}{2}\times1\times1\times\frac{2}{3}\pi - 1\times\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\pi-\sqrt{3}}{3}$$

$\overline{\mathrm{FN}}$ 과 $\overline{\mathrm{OA}}$는 평행하므로 닮음인 두 도형의 길이의 비는

$\overline{\mathrm{OH}} : \overline{\mathrm{FG}} = \cos\frac{\pi}{6} : \sin\frac{\pi}{6} = 1 : \frac{1}{\sqrt{3}}$ 이므로

닮음인 두 도형의 넓이의 비는 $1 : \frac{1}{3}$이다. 즉, 공비는

$\frac{1}{3}$이다.

$$\therefore \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{\frac{\pi-\sqrt{3}}{3}}{1-\left(\frac{1}{3}\right)} = \frac{\pi-\sqrt{3}}{2}$$

<다른풀이>

$\overline{\mathrm{OA}} = \overline{\mathrm{OC}}$, $\overline{\mathrm{CG}}$가 두 번째 부채꼴의 지름이므로

$\overline{\mathrm{OC}} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

길이의 비 $\frac{\overline{\mathrm{OC}}}{\overline{\mathrm{OA}}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ $\therefore$ 넓이의 비는 $\frac{1}{3}$ 이다.

21) [정답] ④

[해설]

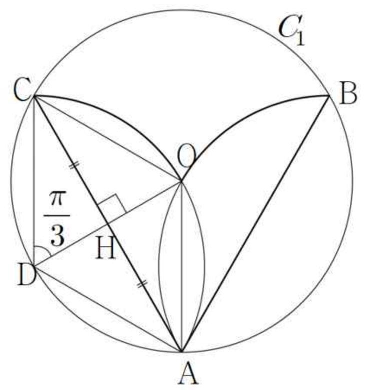


그림 R_1에서 세 점 A, O, C를 지나고 반지름의

길이가 1인 원의 중심을 D라 할 때, $\overline{\mathrm{DO}} = 1$이므로

점 D는 원 C_1 위에 있다. 점 D는 선분 AC의

수직이등분선과 원 C_1의 교점이므로 삼각형 OAD, OCD는

정삼각형이고, 선분 OD와 선분 AC의

교점을 H라 하면 $\overline{\mathrm{OH}} = \overline{\mathrm{HD}} = \frac{1}{2}$,

$\overline{\mathrm{AH}} = \overline{\mathrm{CH}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$이다.

(◁모양의 도형 OHC의 넓이)

=(부채꼴 DOC의 넓이)-(삼각형 DHC의 넓이)

$= \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{8}$

(삼각형 OHA의 넓이)$= \frac{\sqrt{3}}{8}$

▽모양의 도형 ABOC의 넓이 S_1은

$S_1 = 2$(◁모양의 도형 OHC의 넓이

+삼각형 OHA의 넓이)

$= 2\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{8} + \frac{\sqrt{3}}{8}\right) = \frac{\pi}{3}$

그림 R_n에서 원 C_n의 중심을 O_n, 반지름의 길이를 r_n, 원 C_n위의 한 점을 A_n이라 하자.

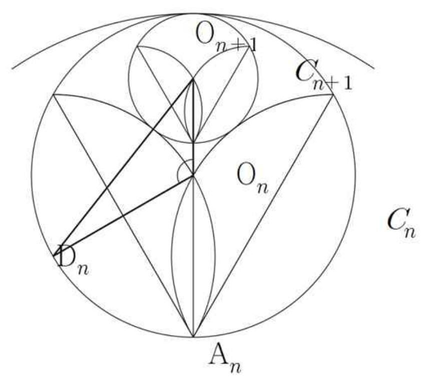


그림 R_{n+1}의 일부인 위 그림에서

두 점 O_n, A_n을 지나고 반지름의 길이가 r_n인

원의 중심을 D_n이라 하자.

삼각형 $\mathrm{O}_n\mathrm{O}_{n+1}\mathrm{D}_n$에서

$\angle \mathrm{D}_n\mathrm{O}_n\mathrm{O}_{n+1} = \frac{2}{3}\pi$, $\overline{\mathrm{O}_n O_{n+1}} = r_n - r_{n+1}$,

$\overline{\mathrm{D}_n\mathrm{O}_n} = r_n$, $\overline{\mathrm{D}_n\mathrm{O}_{n+1}} = r_n + r_{n+1}$이므로

코사인법칙에 의해

$(r_n + r_{n+1})^2$

$= (r_n - r_{n+1})^2 + r_n{}^2 - 2r_n(r_n - r_{n+1})\cos\frac{2}{3}\pi$

$r_{n+1} = \frac{2}{5}r_n$

▽모양의 도형의 닮음비는 원의 반지름 길이의 비와

같으므로, 수열 $\{S_n\}$은 첫째항이 $\frac{\pi}{3}$, 공비가 $\frac{4}{25}$인

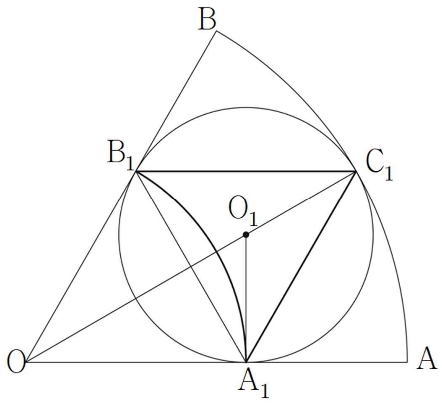
등비수열의 합이다.

따라서 $\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{\frac{\pi}{3}}{1-\frac{4}{25}} = \frac{25}{63}\pi$

22) [정답] ③

[해설]

부채꼴 OAB에서 원 O_1의 중심을 O_1이라 하자.



$\overline{OA_1}=\overline{OB_1}$이고 $\angle AOB=\frac{\pi}{3}$이므로

삼각형 OA_1B_1은 정삼각형이다.

직선 OC_1은 점 O_1을 지나므로

$\angle O_1OA_1=\frac{\pi}{6}$이다.

원 O_1의 반지름의 길이를 a라 하면

$\overline{OA_1}=\sqrt{3}a$, $\overline{OO_1}=2a$, $\overline{O_1C_1}=a$이므로

$\overline{OC_1}=3a=6$, $a=2$이고

$\overline{OA_1}=2\sqrt{3}$, $\overline{A_1C_1}=\overline{B_1C_1}=\overline{B_1A_1}=2\sqrt{3}$

이다.

▽모양의 도형 $A_1C_1B_1$의 넓이는

두 정삼각형 OA_1B_1, $A_1C_1B_1$의 넓이의 합에서

부채꼴 OA_1B_1의 넓이를 뺀 것과 같으므로

$\therefore S_1=2\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times(2\sqrt{3})^2-\frac{1}{2}\times(2\sqrt{3})^2\times\frac{\pi}{3}$

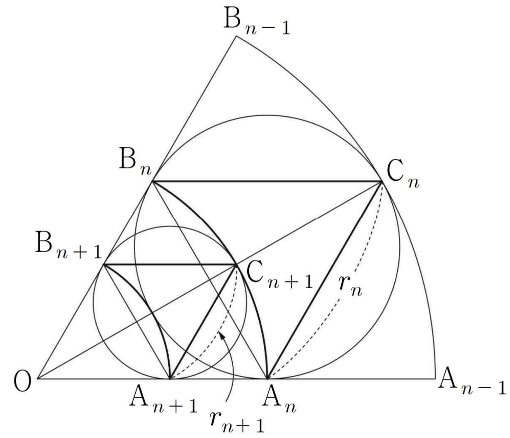
$=6\sqrt{3}-2\pi$

부채꼴 $OA_{n-1}B_{n-1}$에 내접하는 원 O_n이

두 선분 OA_{n-1}, OB_{n-1}, 호 $A_{n-1}B_{n-1}$과

만나는 점을 각각 A_n, B_n, C_n이라 하자.

(단, $A_0=A$, $B_0=B$이다.)



▽모양의 도형 $A_nC_nB_n$과

도형 $A_{n+1}C_{n+1}B_{n+1}$에서

$\overline{A_nC_n}=r_n$, $\overline{A_{n+1}C_{n+1}}=r_{n+1}$이라 하자.

$\overline{OC_{n+1}}=\overline{OA_n}=r_n$이고 $\overline{OA_{n+1}}=r_{n+1}$이므로

삼각형 $OA_{n+1}C_{n+1}$에서

$\angle OA_{n+1}C_{n+1}=\frac{2}{3}\pi$이므로

코사인법칙에 의하여

$r_n^{\ 2}=r_{n+1}^{\ 2}+r_{n+1}^{\ 2}-2r_{n+1}^{\ 2}\cos\frac{2}{3}\pi$

$r_n^{\ 2}=3r_{n+1}^{\ 2}$

$r_{n+1}=\frac{1}{\sqrt{3}}r_n$

두 도형의 닮음비가 $\frac{1}{\sqrt{3}}$이므로 넓이의 비는 $\frac{1}{3}$이다.

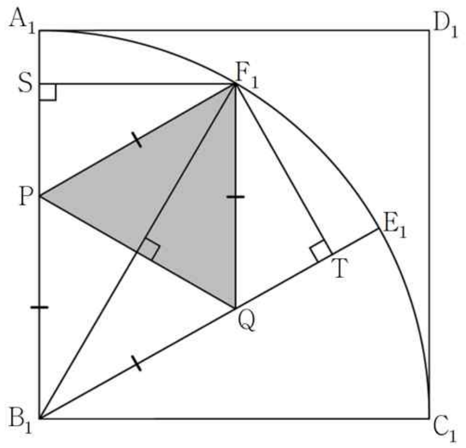
그러므로 수열 $\{S_n\}$은 첫째항이 $6\sqrt{3}-2\pi$이고

공비가 $\frac{1}{3}$인 등비수열이다.

따라서 $\sum_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{6\sqrt{3}-2\pi}{1-\frac{1}{3}}=9\sqrt{3}-3\pi$

23) [정답] ②

[해설]



부채꼴 $B_1E_1A_1$에 내접하는 정삼각형의 꼭짓점 중 F_1이 아닌 나머지 두 점을 각각 P, Q라 하자.

점 F_1에서 선분 A_1B_1, 선분 B_1E_1에 내린 수선의 발을 각각 S, T라 하자.

삼각형 B_1F_1S와 삼각형 B_1F_1T는 합동이므로 삼각형 F_1SP와 삼각형 F_1TQ는 합동이다.

$\overline{B_1P}=\overline{B_1Q}$이고 삼각형 B_1QP는 정삼각형이다.

$\overline{F_1P}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{1}{2}\overline{B_1F_1}=1$

$\overline{F_1P}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$이므로 $S_1=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

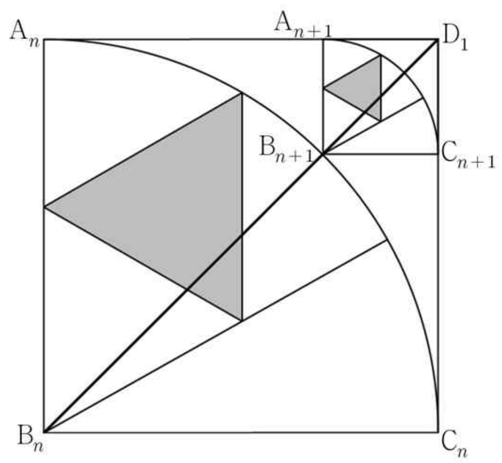


그림 $R_n(n\ge 1)$을 얻을 때, 정사각형 $A_nB_nC_nD_1$의 한 변의 길이를 a_n이라 하고

새로 그려진 정삼각형의 넓이를 T_n이라 하자.

$\overline{B_nD_1}=\sqrt{2}a_n$, $\overline{B_{n+1}D_1}=\sqrt{2}a_n-a_n=(\sqrt{2}-1)a_n$

정사각형 $A_nB_nC_nD_1$과

정사각형 $A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}D_1$이 닮음이므로

$a_n:a_{n+1}=\overline{B_nD_1}:\overline{B_{n+1}D_1}=\sqrt{2}:\sqrt{2}-1$

$T_n:T_{n+1}=2:(\sqrt{2}-1)^2$

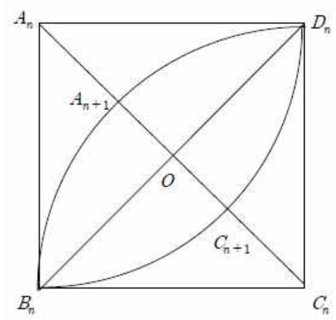
$T_{n+1}=\dfrac{3-2\sqrt{2}}{2}T_n$이고

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}T_k$$

$$=\frac{\frac{\sqrt{3}}{3}}{1-\left(\frac{3-2\sqrt{2}}{2}\right)}=\frac{4\sqrt{6}+2\sqrt{3}}{21}$$

24) [정답] ③

[해설]



정사각형 $A_nB_nC_nD_n$의 한 변의 길이를 x_n, 두 대각선의 교점을 O라 하면

$\overline{OA_n}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}x_n$

따라서, $\overline{A_nC_{n+1}}=x_n$이므로

$\overline{OC_{n+1}}=x_n-\dfrac{\sqrt{2}}{2}x_n=\left(1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)x_n$

따라서,

$\overline{A_nC_n}:\overline{A_{n+1}C_{n+1}}=\sqrt{2}x_n:2\left(1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)x_n$

$=\sqrt{2}:(2-\sqrt{2})$

이므로 닮음비는

$\dfrac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\dfrac{2\sqrt{2}-2}{2}=\sqrt{2}-1$

이다.

또한, $x_1=1$이므로

$\overline{A_1A_2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\left(1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=\sqrt{2}-1$

이므로

$S_1=2\times\dfrac{1}{4}(\sqrt{2}-1)^2=\dfrac{1}{2}(3-2\sqrt{2})$

따라서,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{\frac{1}{2}(3-2\sqrt{2})}{1-(\sqrt{2}-1)^2}$$

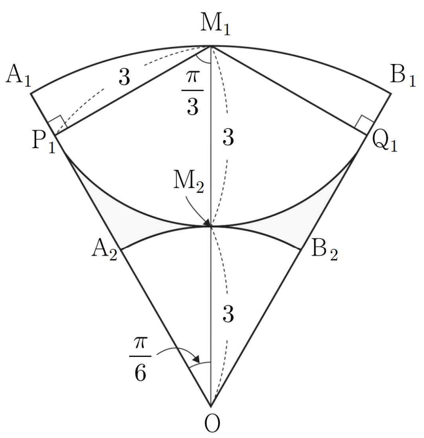
$$= \frac{\frac{1}{2}(3-2\sqrt{2})}{2\sqrt{2}-2}$$

$$= \frac{1}{4}(\sqrt{2}-1)$$

25) [정답] ①

[해설]

그림 R_1에서



R_1

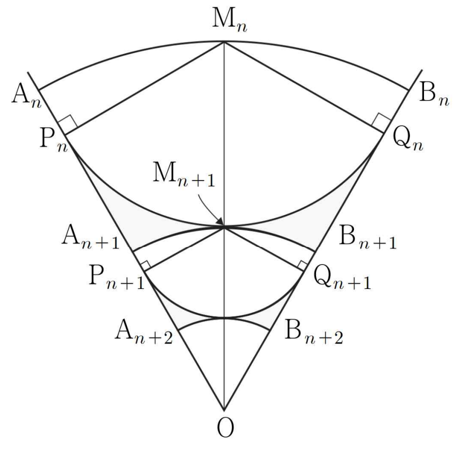
S_1은 직각삼각형 OP_1M_1의 넓이에서 부채꼴 $M_1P_1M_2$의 넓이와 부채꼴 OA_2M_2의 넓이를 뺀 값의 두 배이므로

$$S_1 = 2\times\left\{\left(\frac{1}{2}\times3\times3\sqrt{3}\right)-\frac{1}{2}\times\left(3^2\times\frac{\pi}{3}+3^2\times\frac{\pi}{6}\right)\right\}$$

$$= 2\times\left\{\frac{9\sqrt{3}}{2}-\left(\frac{3}{2}\pi+\frac{3}{4}\pi\right)\right\}$$

$$= 9\sqrt{3}-\frac{9}{2}\pi$$

다음은 그림 R_{n+1}의 일부이다.



R_{n+1}

$\overline{OM_n} = a(a\neq0)$라 하면 $\overline{OM_{n+1}} = \frac{a}{2}$

중심각의 크기가 같은 부채꼴 OA_nB_n과 부채꼴 $OA_{n+1}B_{n+1}$은 닮음이고

닮음비는 $\overline{OM_n}:\overline{OM_{n+1}} = a:\frac{a}{2} = 1:\frac{1}{2}$이다.

그러므로 그림 R_n과 R_{n+1}에서

새로 얻어진  모양의 도형도 서로 닮음이고

닮음비가 $1:\frac{1}{2}$이므로 넓이의 비는 $1:\frac{1}{4}$이다.

따라서 S_n은 첫째항이 $9\sqrt{3}-\frac{9}{2}\pi$이고 공비가 $\frac{1}{4}$인

등비수열의 합이므로

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{9\sqrt{3}-\frac{9}{2}\pi}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3}\left(9\sqrt{3}-\frac{9}{2}\pi\right)$$

$$= 12\sqrt{3}-6\pi = 6(2\sqrt{3}-\pi)$$

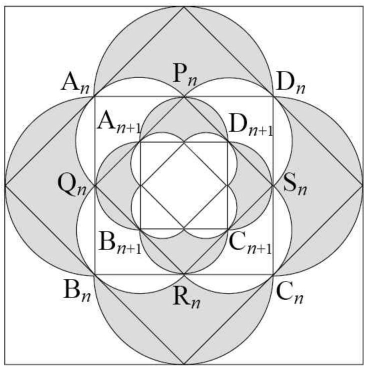
26) [정답] ①

[해설]

T_1 =(도형 E_1의 넓이)-(도형 F_1의 넓이)

$=(2\pi+4)-(\pi+2)=\pi+2$

그림은 G_{n+1}의 일부이다.



정사각형 $A_nB_nC_nD_n$의 한 변의 길이를 a_n이라 하면

$\overline{A_nC_n}=\overline{A_nA_{n+1}}+\overline{A_{n+1}C_{n+1}}+\overline{C_{n+1}C_n}$

$$\sqrt{2}a_n=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{a_n}{2}+\sqrt{2}a_{n+1}+\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{a_n}{2}$$

$$a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n$$

그림 G_{n+1}의 새로 색칠된 부분의 넓이를 b_{n+1}이라 하면

$$b_{n+1}=\frac{1}{4}b_n,\ b_1=T_1$$

그러므로 T_n은 첫째항이 $\pi+2$이고 공비가 $\frac{1}{4}$인 등비수열 $\{b_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합이다.

따라서 $\lim\limits_{n\to\infty}T_n=\dfrac{\pi+2}{1-\frac{1}{4}}=\dfrac{4}{3}(\pi+2)$

27) [정답] ①

[해설]

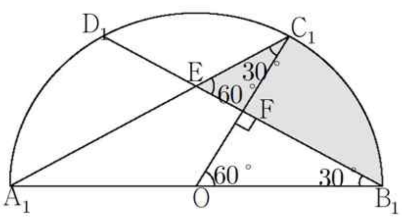


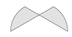
그림 R_1에서 두 선분 A_1C_1과 B_1D_1의 교점을 E, 두 선분 OC_1과 B_1D_1의 교점을 F라 하자. 삼각형 OB_1F와 삼각형 C_1EF는 세 내각의 크기가 $30°$, $60°$, $90°$인 직각삼각형이므로 삼각비에 의해

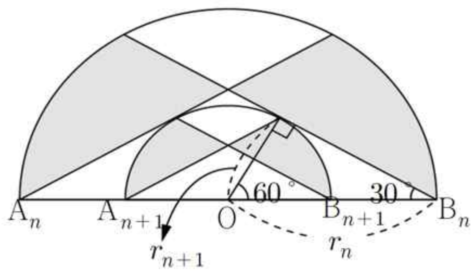
$\overline{B_1F}=\sqrt{3}$, $\overline{OF}=\overline{C_1F}=1$, $\overline{EF}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

이다. S_1은 부채꼴 OB_1C_1의 넓이와 삼각형 C_1EF의 넓이를 더한 값에서 삼각형 OB_1F의 넓이를 뺀 값의 2배와 같으므로

$$S_1=\left\{\pi\times2^2\times\frac{60°}{360°}+\frac{1}{2}\times1\times\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{1}{2}\times\sqrt{3}\times1\right\}\times2$$

$$=\frac{4\pi}{3}-\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

이다. 그림 R_n에서 가장 작은 반원의 반지름의 길이를 r_n이라 하고, 그림 R_n을 얻는 과정에서 새로 얻은  모양의 넓이를 a_n이라 하자.



$r_{n+1}:r_n=1:2$이므로

$a_{n+1}:a_n=(r_{n+1})^2:(r_n)^2$

$a_{n+1}:a_n=1^2:2^2$

$$a_{n+1}=\frac{1}{4}a_n$$

이다. 따라서 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 $\frac{4\pi}{3}-\frac{2\sqrt{3}}{3}$이고 공비가

$\frac{1}{4}$인 등비수열이므로

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{\frac{4\pi}{3}-\frac{2\sqrt{3}}{3}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{16\pi-8\sqrt{3}}{9}$$

이다. 그러므로 $a+b=16-8=8$이다.

28) [정답] ①

[해설]

MN의 중점을 O, HN과 FM의 교점을 P, GN과 EM의 교점을 Q라 하면

$OM=3$, $OP=\sqrt{3}$, $MP=2\sqrt{3}$, $\square MPNQ=6\sqrt{3}$

내접하는 정사각형의 한변$=\dfrac{MN}{\sqrt{3}+1}=\dfrac{6}{\sqrt{3}+1}$

$\therefore$ 닮음비$=\dfrac{1}{\sqrt{3}+1}$, 공비는 $\left(\dfrac{1}{1+\sqrt{3}}\right)^2$

$S_1=2$(부채꼴MFE-□$MPNQ$)$=12(\pi-\sqrt{3})$

$$\lim_{n\to\infty}S_\infty=\frac{12(\pi-\sqrt{3})}{1-\left(\frac{1}{1+\sqrt{3}}\right)^2}=8\sqrt{3}(\pi-\sqrt{3})$$

29) [정답] ③

[해설]

$\overline{A_1D_1}=2+1=3$이므로 정삼각형 $A_1B_1C_1$의 한 변의 길이를 a라 하면

$\dfrac{\sqrt{3}}{2}a=3 \therefore a=2\sqrt{3}$

$\therefore S_1=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times(2\sqrt{3})^2\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2}{3}$

$+\dfrac{1}{3}\left\{4\pi-\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times(2\sqrt{3})^2\right\}$

$=\dfrac{4}{3}\pi$

원 O_2의 반지름의 길이를 r라 하면

$\dfrac{1}{2}r(2\sqrt{3}+\sqrt{3}+3)=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{3}\times3$

$\therefore r=\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}$

따라서 두 원 O_1, O_2의 닮음비가

$2:\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}=1:\dfrac{3-\sqrt{3}}{4}$

이므로 넓이의 비는 $1:\dfrac{6-3\sqrt{3}}{8}$이다.

$$\therefore \lim_{n\to\infty}S_n=\frac{\frac{4}{3}\pi}{1-\frac{6-3\sqrt{3}}{8}}=\frac{32(3\sqrt{3}-2)\pi}{69}$$

30) [정답] ②

[해설]

$\angle B_1C_1D_1=30^\circ$, $\angle C_1D_1B_1=90^\circ$ 이므로

직각삼각형 $B_1C_1D_1$에서

$\overline{C_1D_1}=\overline{B_1C_1}\cos30^\circ$

$=1\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

한편, 두 선분 B_1B_2와 B_1D_1과 호 D_1B_2로 둘러싸인 영역의 넓이는

$\triangle B_1C_1D_1-B_2C_1D_1$

$=\dfrac{1}{2}\times\overline{C_1D_1}\times\overline{D_1B_1}-\overline{C_1D_1}^2\times\pi\times\dfrac{30^\circ}{360^\circ}$

$=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\dfrac{1}{2}-\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\times\pi\times\dfrac{1}{12}$

$=\dfrac{\sqrt{3}}{8}-\dfrac{\pi}{16}$

$=\dfrac{2\sqrt{3}-\pi}{16}$ …… ㉠

또, 삼각형 $C_1A_2C_2$의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times\overline{C_2C_1}\times\overline{C_1A_2}\times\sin30^\circ$

$=\dfrac{1}{2}\times\left(\dfrac{1}{2}\overline{B_2C_1}\right)\times\left(\overline{B_2C_1}\cos30^\circ\right)\times\sin30^\circ$

$=\dfrac{1}{2}\times\left(\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\times\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\times\dfrac{1}{2}$

$=\dfrac{3\sqrt{3}}{64}$ …… ㉡

따라서 R_1의 넓이 S_1은 ㉠과 ㉡에 의해

$S_1=\dfrac{2\sqrt{3}-\pi}{16}+\dfrac{3\sqrt{3}}{64}$

$=\dfrac{11\sqrt{3}-4\pi}{64}$

한편, 직각삼각형 $A_2B_2C_1$에서

$\angle B_2C_1A_2=30^\circ$ 이므로 $\angle A_2B_2C_1=60^\circ$

또, $\overline{A_2B_2}=\overline{B_2C_1}\sin30^\circ$

$=\dfrac{1}{2}\overline{B_2C_1}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

그러므로 삼각형 $A_2B_2C_2$에서

$\angle A_2B_2C_2=60^\circ$ 이고 $\overline{A_2B_2}=\overline{B_2C_2}$

즉, 삼각형 $A_2B_2C_2$는 한 변의 길이가 $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$인 정삼각형이다.

그러므로 길이의 비가 $1:\dfrac{\sqrt{3}}{4}$이므로 넓이의 비는

$1:\dfrac{3}{16}$이다.

따라서

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{\frac{11\sqrt{3}-4\pi}{64}}{1-\frac{3}{16}}$$

$$= \frac{11\sqrt{3}-4\pi}{52}$$

31) [정답] ①

[해설]

(도형 T_1 의 넓이)

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}\times 1^2\times 2 - \frac{1}{6}\times\pi\times 1^2 = \frac{3\sqrt{3}-\pi}{6}$$

(도형 T_2 의 넓이)=(도형 T_3 의 넓이)

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}\times\left(\frac{1}{2}\right)^2\times 2 - \frac{1}{6}\times\pi\times\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$= \frac{1}{4}\times\frac{3\sqrt{3}-\pi}{6}$$

S_1 =(도형 T_1 의 넓이)+2×(도형 T_2 의 넓이)

$$= \frac{3\sqrt{3}-\pi}{6} + 2\times\left(\frac{1}{4}\times\frac{3\sqrt{3}-\pi}{6}\right) = \frac{3\sqrt{3}-\pi}{4}$$

정삼각형 $A_nB_nC_n$ 의 한 변의 길이를 a_n 이라 하면

$2\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\times a_{n+1}\right) = \frac{1}{2}\times a_n$ 이므로

$$a_{n+1} = \frac{1}{2\sqrt{3}}a_n$$

그림 R_{n+1} 의 새로 색칠된 부분의 넓이를 b_{n+1} 이라 하면

$b_{n+1} = \frac{1}{12}b_n$, $b_1 = S_1$

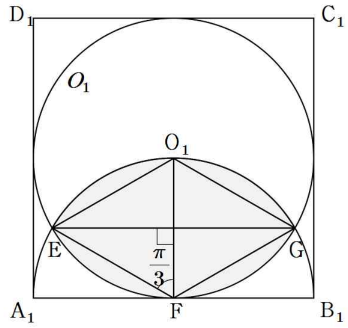
수열 $\{b_n\}$ 은 첫째항이 $\frac{3\sqrt{3}-\pi}{4}$ 이고 공비가 $\frac{1}{12}$ 인 등비수열이다.

따라서 $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} b_k = \frac{\frac{3\sqrt{3}-\pi}{4}}{1-\frac{1}{12}} = \frac{3(3\sqrt{3}-\pi)}{11}$

32) [정답] ②

[해설]

그림 R_1 에서



원 O_1 의 중심 O_1과 세 점 E, F, G가 있다.

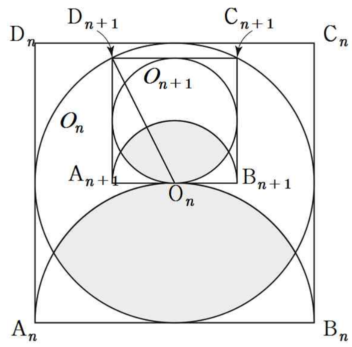
두 삼각형 O_1EF, O_1FG는 정삼각형이다.

S_1은 점 O_1을 포함하는 부채꼴 FGE의 넓이에서 삼각형 FGE의 넓이를 뺀 값의 두 배이므로

$$S_1 = 2\left\{\left(\frac{1}{2}\times 2^2\times\frac{2}{3}\pi\right) - \left(\frac{1}{2}\times 1\times 2\sqrt{3}\right)\right\}$$

$$= \frac{8}{3}\pi - 2\sqrt{3}$$

다음은 그림 R_{n+1}의 일부에 선분 $D_{n+1}O_n$을 그린 그림이다.



$\overline{A_nD_n} = a\ (a\neq 0)$이라 하면 $\overline{D_{n+1}O_n} = \frac{a}{2}$ 이고, 삼각형 $A_{n+1}O_nD_{n+1}$이 직각삼각형이므로

$$\overline{A_{n+1}D_{n+1}} = \frac{a}{\sqrt{5}}$$

정사각형 $A_nB_nC_nD_n$과 정사각형 $A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}D_{n+1}$은 서로 닮음이고

$$\overline{A_nD_n} : \overline{A_{n+1}D_{n+1}} = a : \frac{a}{\sqrt{5}} = 1 : \frac{1}{\sqrt{5}}$$

따라서 그림 R_n과 R_{n+1}에서 새로 얻어진 ⬭모양의 도형도 서로 닮음이고 닮음비가 $1 : \frac{1}{\sqrt{5}}$이므로 넓이의 비는 $1 : \frac{1}{5}$이다.

S_n은 첫째항이 $\frac{8}{3}\pi - 2\sqrt{3}$이고 공비가 $\frac{1}{5}$인 등비수열의 첫째항부터 제 n항까지의 합이므로

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{\frac{8}{3}\pi - 2\sqrt{3}}{1-\frac{1}{5}}$$

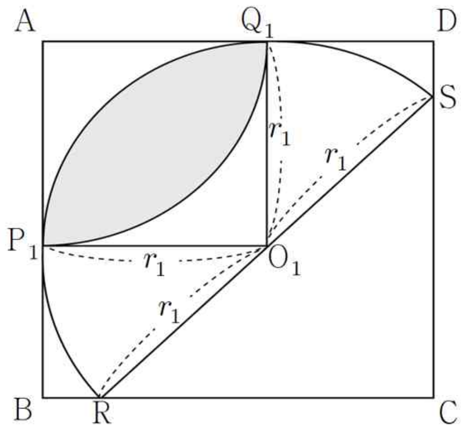
$$= \frac{5}{4}\left(\frac{8}{3}\pi - 2\sqrt{3}\right)$$

$$= \frac{5}{2}\left(\frac{4}{3}\pi - \sqrt{3}\right)$$

33) [정답] ②

[해설]

첫 번째 반원이 변 BC와 만나는 점을 R, 변 CD와 만나는 점을 S, 반지름의 길이를 r_1이라 하자.



삼각형 RCS는 직각이등변삼각형이고

점 $\mathrm{O_1}$은 빗변의 중점이므로 $\overline{\mathrm{CO_1}} = \overline{\mathrm{SO_1}} = \overline{\mathrm{RO_1}} = r_1$이다.

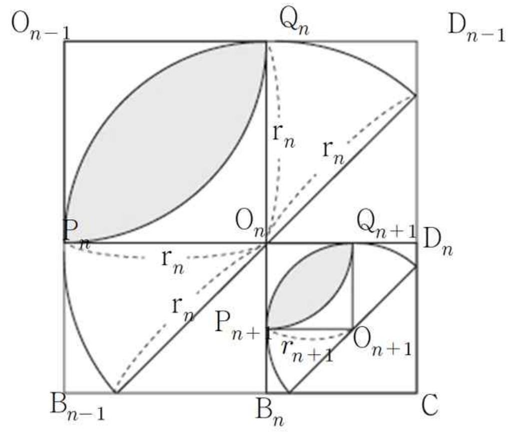
$\overline{\mathrm{AC}} = \overline{\mathrm{AO_1}} + \overline{\mathrm{CO_1}}$ 이므로 $4\sqrt{2} = r_1\sqrt{2} + r_1$이다.

따라서 $r_1 = 4(2-\sqrt{2})$이고,

$S_1 = 2\times\left(\frac{1}{4}\pi r_1^2 - \frac{1}{2}r_1^2\right) = 16(\pi-2)(\sqrt{2}-1)^2$ 이다.

그림 R_n에서 가장 작은 반원의 반지름의 길이를

r_n이라 하고, 그림 R_n을 얻은 과정에서 새로 얻은 모양의 넓이를 a_n이라 하자.



$\overline{\mathrm{O_nC}} = \overline{\mathrm{O_nO_{n+1}}} + \overline{\mathrm{O_{n+1}C}}$이므로 $r_n = \sqrt{2}r_{n+1} + r_{n+1}$

$r_{n+1} = (\sqrt{2}-1)r_n$이다. 그러므로

$a_{n+1} : a_n = (\sqrt{2}-1)^2 : 1^2$ 에서 $a_{n+1} = (\sqrt{2}-1)^2 a_n$ 이다.

따라서 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 $16(\pi-2)(\sqrt{2}-1)^2$ 이고 공비가 $(\sqrt{2}-1)^2$인 등비수열이므로

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{16(\sqrt{2}-1)^2(\pi-2)}{1-(\sqrt{2}-1)^2} = \frac{16(\sqrt{2}-1)^2(\pi-2)}{2(\sqrt{2}-1)}$$

$$= (8\sqrt{2}-8)(\pi-2)$$

이다. 따라서 $p=q=8$이므로 $p+q=16$이다.

34) [정답] ①

[해설]

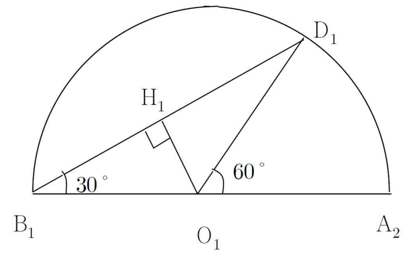
변 $\mathrm{B_1C_1}$의 중점을 $\mathrm{M_1}$이라 하면

$\overline{\mathrm{B_1M_1}} = \sqrt{3}$, $\angle \mathrm{A_2B_1M_1} = 30°$

이므로

$\overline{\mathrm{A_2B_1}} = 2$

따라서, $\overline{\mathrm{A_2B_1}}$의 중점을 $\mathrm{O_1}$, 변 $\mathrm{A_1B_1}$과 지름이 $\mathrm{A_2B_1}$인 반원과 만나는 점을 $\mathrm{D_1}$, 점 $\mathrm{O_1}$에서 선분 $\mathrm{B_1D_1}$에 내린 수선의 발을 $\mathrm{H_1}$이라 하면



$\overline{\mathrm{B_1O_1}} = 1$, $\overline{\mathrm{O_1H_1}} = \frac{1}{2}$, $\overline{\mathrm{B_1H_1}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 이므로

도형 $B_1A_2D_1$ 의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times\sqrt{3}\times\frac{1}{2}+\pi\times1^2\times\frac{60°}{360°}=\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{\pi}{6}$$

또한, 삼각형 $A_1B_1C_1$ 의 높이는

$$\overline{A_1M_1}=\frac{\sqrt{3}}{2}\times2\sqrt{3}=3$$

이고 삼각형 $A_2B_2C_2$ 의 높이는

$$\overline{A_2M_1}=1$$

이므로 두 삼각형 $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ 의 닮음비는 $3:1$ 에서

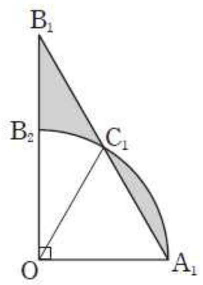
수열 $\{S_n\}$ 의 공비는 $\frac{1}{9}$ 이다.

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{2\left(\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{\pi}{6}\right)}{1-\frac{1}{9}}=\frac{9\sqrt{3}+6\pi}{16}$$

35) [정답] ④

[해설]

그림 R_1에서 부채꼴 OA_1B_2의 호 A_1B_2와 선분 A_1B_1이 만나는 점을 C_1이라 하자.



$\angle C_1OA_1=\frac{\pi}{3}$이므로 부채꼴 OA_1C_1의 넓이와 삼각형 OA_1C_1의 넓이의 차는

$$\frac{1}{2}\times4^2\times\frac{\pi}{3}-\frac{1}{2}\times4^2\times\sin\frac{\pi}{3}=\frac{8}{3}\pi-4\sqrt{3}\quad\cdots\cdots\ ㉠$$

또 $\angle C_1OB_1=\frac{\pi}{6}$이므로 삼각형 OB_1C_1의 넓이와 부채꼴 OB_2C_1의 넓이의 차는

$$\frac{1}{2}\times4\times4\sqrt{3}\times\sin\frac{\pi}{6}-\frac{1}{2}\times4^2\times\frac{\pi}{6}=4\sqrt{3}-\frac{4}{3}\pi\quad\cdots\cdots\ ㉡$$

㉠, ㉡에서 $S_1=\left(\frac{8}{3}\pi-4\sqrt{3}\right)+\left(4\sqrt{3}-\frac{4}{3}\pi\right)=\frac{4}{3}\pi$

한편 삼각형 OA_nB_n과 삼각형 $OA_{n+1}B_{n+1}$의 닮음비는

$\overline{OB_n}\ :\ \overline{OB_{n+1}}\ =\ \sqrt{3}\ :\ 1$

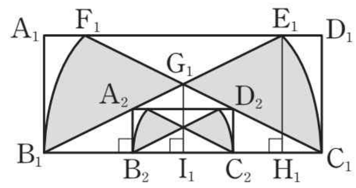
따라서 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이 S_n은 첫째항이 $\frac{4}{3}\pi$이고, 공비가 $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2=\frac{1}{3}$인 등비수열의 첫째항부터 제$n$항까지의 합이므로

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{\frac{4}{3}\pi}{1-\frac{1}{3}}=2\pi$$

36) [정답] ②

[해설]

그림 R_n에서 새로 색칠된 도형의 넓이를 a_n이라 하자.
점 E_1과 점 G_1에서 변 B_1C_1에 내린 수선의 발을 각각 H_1, I_1이라 하면 직각삼각형 $B_1H_1E_1$에서



$\sin(\angle E_1B_1H_1)=\frac{\overline{E_1H_1}}{\overline{B_1E_1}}=\frac{1}{2}$이므로 $\angle E_1B_1H_1=30°$이다.

이때 직각삼각형 $B_1I_1G_1$에서

$\overline{G_1I_1}=\overline{B_1I_1}\times\tan30°=1\times\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}$그러므로

$$a_1=2\left(4\pi\times\frac{30°}{360°}-\frac{1}{2}\times2\times\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=\frac{2(\pi-\sqrt{3})}{3}$$

$\overline{B_2I_1}=\overline{A_2B_2}=a(0<a<1)$이라 하면 직각삼각형 $A_2B_1B_2$에서

$\tan30°=\frac{a}{1-a}$, $\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{a}{1-a}$, $a=\frac{\sqrt{3}-1}{2}$

즉, 두 직사각형 $A_1B_1C_1D_1$, $A_2B_2C_2D_2$의 닮음비는

$1:\frac{\sqrt{3}-1}{2}$이다.

그러므로 그림 R_n에서 가장 작은 직사각형 안에 색칠된 도형과 그림 R_{n+1}에서 가장 작은 직사각형 안에 색칠된 도형의 닮음비는

$1:\frac{\sqrt{3}-1}{2}$이고, 넓이의 비는 $1:\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)^2$,

즉 $1:\frac{2-\sqrt{3}}{2}$이다. 따라서 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이

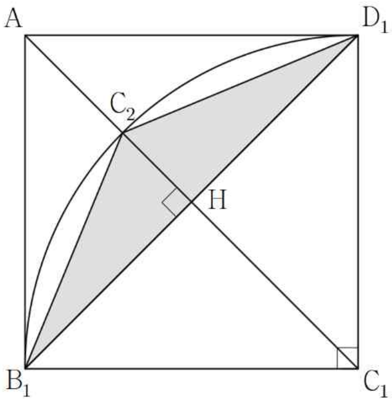
$\frac{2(\pi-\sqrt{3})}{3}$이고 공비가 $\frac{2-\sqrt{3}}{2}$인 등비수열이므로

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}a_k=\frac{\frac{2(\pi-\sqrt{3})}{3}}{1-\frac{2-\sqrt{3}}{2}}=\frac{4\sqrt{3}\pi-12}{9}$$

37) [정답] ④

[해설]

그림 R_1에서



선분 C_1C_2 와 선분 B_1D_1 이 만나는 점을 H 라 하자.

$\overline{B_1D_1} = 2\sqrt{2}$

$\overline{HC_2} = \overline{C_1C_2} - \overline{C_1H} = 2 - \sqrt{2}$

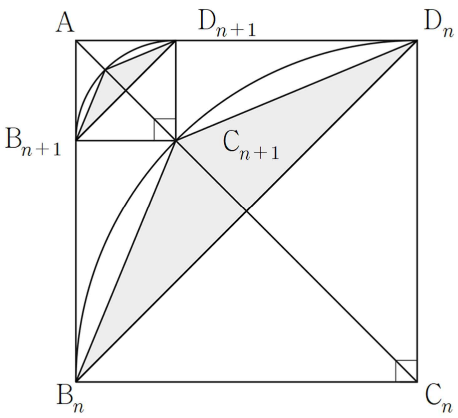
이므로

$S_1 = \frac{1}{2} \times \overline{B_1D_1} \times \overline{HC_2}$

$= \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times (2 - \sqrt{2})$

$= 2\sqrt{2} - 2$

다음은 그림 R_{n+1} 의 일부이다.



$\overline{AC_{n+1}} = \overline{AC_n} - \overline{C_{n+1}C_n}$

$= \overline{AC_n} - \overline{B_nC_n}$

$= \overline{AC_n} - \frac{\sqrt{2}}{2} \times \overline{AC_n}$

$= \frac{2 - \sqrt{2}}{2} \overline{AC_n}$

이고 $\overline{AC_n} = \overline{B_nD_n}$ 이므로

$\overline{AC_n} : \overline{AC_{n+1}} = \overline{B_nD_n} : \overline{B_{n+1}D_{n+1}} = 1 : \frac{2 - \sqrt{2}}{2}$

그러므로 그림 R_n 과 R_{n+1} 에서 새로 얻어진 두 삼각형은 서로 닮음이고 닮음비가 $1 : \frac{2 - \sqrt{2}}{2}$ 이므로 넓이의 비는 $1 : \frac{3 - 2\sqrt{2}}{2}$ 이다.

그러므로 수열 $\{S_n\}$ 은

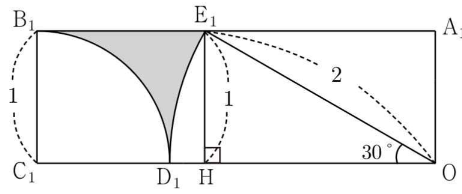
첫째항이 $2\sqrt{2} - 2$ 이고 공비가 $\frac{3 - 2\sqrt{2}}{2}$ 인

등비수열의 첫째항부터 제n항까지의 합이다.

따라서 $\lim_{n \to \infty} S_n = \frac{2\sqrt{2} - 2}{1 - \frac{3 - 2\sqrt{2}}{2}} = \frac{12 - 4\sqrt{2}}{7}$

38) [정답] ②

[해설]



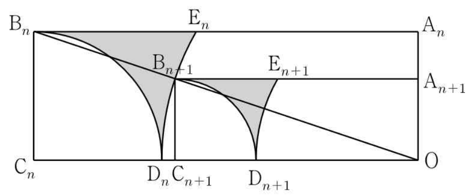
점 E_1에서 선분 C_1O에 내린 수선의 발을 H라 하면

직각삼각형 E_1HO에서 $\overline{E_1H} = 1$, $\overline{E_1O} = 2$이므로

$\angle E_1OH = 30^\circ$

S_1은 직사각형 $OA_1B_1C_1$에서 부채꼴 $C_1B_1D_1$, 부채꼴OE_1D_1, 삼각형 E_1OA_1을 제외한 부분의 넓이이므로

$S_1 = 3 - \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$



두 직사각형 $OA_nB_nC_n$과 $OA_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}$서로 닮은 사각형이다.

$\overline{B_nC_n} = 1$, $\overline{OC_n} = 3$에서 $\overline{OB_n} = \sqrt{10}$, $\overline{OB_{n+1}} = 2$이므로

닮음비는 $\overline{OB_n} : \overline{OB_{n+1}} = \sqrt{10} : 2$

따라서 넓이의 비는 $10 : 4 = 5 : 2$

따라서 S_n은 첫째항이 $S_1 = 3 - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{7}{12}\pi$, 공비가 $\frac{2}{5}$인

등비수열이므로

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \frac{3 - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{7}{12}\pi}{1 - \frac{2}{5}}$$

$=5-\frac{5\sqrt{3}}{6}-\frac{35}{36}\pi$

39) [정답] ①

[해설]

$S_1=2\times\{$(부채꼴 $C_3C_2P_1$의 넓이)

-(직각삼각형 $C_3C_2A_2$의 넓이)$\}$

$=2\times\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{3\pi-2\sqrt{3}}{2}$

정삼각형 $A_nB_nC_n$의 한 변의 길이를 a_n이라 하면
삼각형의 중점연결 정리에 의해

$a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n$ 이므로 그림 R_n에 새로 색칠된
부분의 넓이를 b_n이라 하면

$b_{n+1}=\frac{1}{4}b_n$, $b_1=S_1$

수열 $\{b_n\}$은 첫째항이 $\frac{3\pi-2\sqrt{3}}{2}$ 이고

공비가 $\frac{1}{4}$인 등비수열이다.

$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}b_k$

$=\frac{\frac{3\pi-2\sqrt{3}}{2}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{6\pi-4\sqrt{3}}{3}$

40) [정답] ②

[해설]

그림 R_n에서 새로 색칠된 부분의 넓이를 a_n이라 하자.

그림 R_1에서 색칠된 부분의 넓이는 정사각형 $A_1B_1C_1D_1$의
넓이에서 반지름의 길이가 1인 반원의 넓이와
직각이등변삼각형 $G_1E_1F_1$의 넓이를 뺀 값과 같으므로

$a_1=2^2-\left(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\times2\times1\right)=\frac{1}{2}(6-\pi)$

그림 R_2에서 선분 G_1F_1의 중점을 O, 선분 G_1F_1과 선분
B_2C_2의 교점을 H라 하고 선분 OH의 길이를 x라 하면

$\overline{HB_2}=\overline{HF_1}=1-x$, $\overline{C_2H}=2x-(1-x)=3x-1$ 이므로 삼각형
OHC_2에서

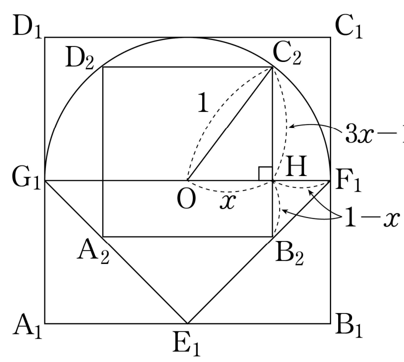
$1^2=x^2+(3x-1)^2$, $x=\frac{3}{5}$

두 정사각형 $A_1B_1C_1D_1$, $A_2B_2C_2D_2$의 닮음비는 $1:\frac{3}{5}$이므로

모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+1}=\left(\frac{3}{5}\right)^2a_n$이 성립한다. 따라서

수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 $\frac{1}{2}(6-\pi)$이고 공비가 $\frac{9}{25}$인
등비수열이므로

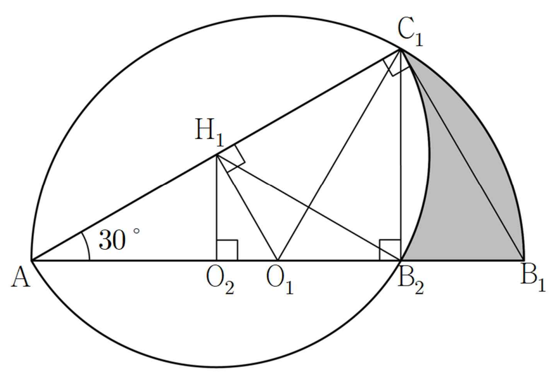
$\lim_{n\to\infty}S_n=\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{\frac{1}{2}(6-\pi)}{1-\frac{9}{25}}=\frac{25(6-\pi)}{32}$



41) [정답] ④

[해설]

그림 R_1에서



$\angle B_1AC_1=30^\circ$ 이므로

직각삼각형 C_1AB_1에서 $\overline{AC_1}=4\sqrt{3}$

직각삼각형 C_1AB_2에서 $\overline{AB_2}=6$

선분 AB_1의 중점을 O_1, 선분 AB_2의 중점을 O_2, 선분
AC_1의

중점을 H_1이라 하면

$\overline{O_1H_1}=2$, $\overline{H_1O_2}=\sqrt{3}$

$S_1=$(부채꼴 $O_1B_1C_1$ +삼각형 O_1C_1A)

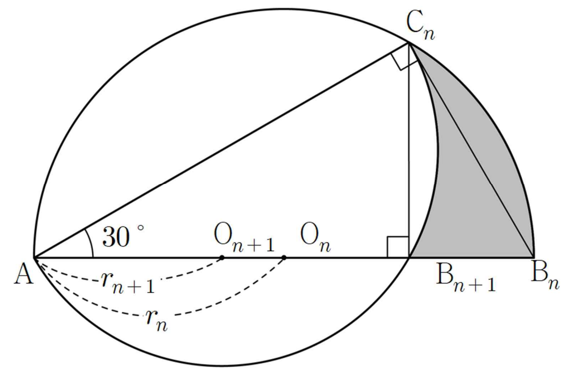
$-$(부채꼴 $H_1B_2C_1$ +삼각형 H_1AB_2)

$=\left(16\pi\times\frac{60^\circ}{360^\circ}+\frac{1}{2}\times4\sqrt{3}\times2\right)-\left(12\pi\times\frac{60^\circ}{360^\circ}+\frac{1}{2}\times6\times\sqrt{3}\right)$

$=16\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{4}\right)-12\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$

$=\frac{1}{3}(2\pi+3\sqrt{3})$

다음은 그림 R_n 의 일부이다.



$\overline{AB_n}$을 지름으로 하는 반원의 반지름의 길이를 r_n, $\overline{AB_{n+1}}$을 지름

으로 하는 반원의 반지름의 길이를 r_{n+1}이라 하자.

$\overline{AB_n}=2r_n$, $\angle B_nAC_n=30^\circ$ 이므로

직각삼각형 C_nAB_n에서 $\overline{AC_n}=\sqrt{3}r_n$

$\angle B_{n+1}AC_n=30^\circ$ 이므로

직각삼각형 C_nAB_{n+1}에서 $\overline{AB_{n+1}}=\frac{3}{2}r_n$

따라서 $r_{n+1}=\frac{3}{4}r_n$

그림 R_n 에서 새롭게 색칠되는 도형의 넓이를 T_n이라 하면

$T_{n+1}=\frac{9}{16}T_n$이고 $S_n=\sum_{k=1}^{n}T_n$

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}T_k=\frac{\frac{1}{3}(2\pi+3\sqrt{3})}{1-\frac{9}{16}}=\frac{16}{21}(2\pi+3\sqrt{3})$$

따라서 $p+q=21+16=37$

42) [정답] ③

[해설]

그림 R_n에서 새로 색칠된 도형의 넓이를 a_n이라 하자.

그림 R_1에서 삼각형 ABC와 삼각형 F_1E_1C가 닮음이므로

$\overline{AB}:\overline{F_1E_1}=\overline{BC}:\overline{E_1C}$

마름모 $D_1BE_1F_1$의 한 변의 길이를 x라 하면

$2:x=4:(4-x)$이므로 $x=\frac{4}{3}$

그림 R_1에서 색칠된 부분의 넓이는 마름모 $D_1BE_1F_1$의 넓이에서 부채꼴 BE_1D_1의 넓이를 뺀 값이므로

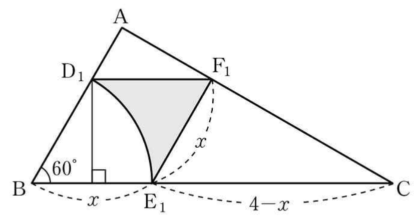
$$a_1=\frac{4}{3}\times\frac{4}{3}\sin60^\circ-\pi\times\left(\frac{4}{3}\right)^2\times\frac{60^\circ}{360^\circ}$$

$=\frac{8(3\sqrt{3}-\pi)}{27}$

그림 R_2에서 삼각형 ABC와 삼각형 F_1E_1C의 닮음비는 $1:\frac{2}{3}$이므로 모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+1}=\frac{4}{9}a_n$이 성립한다.

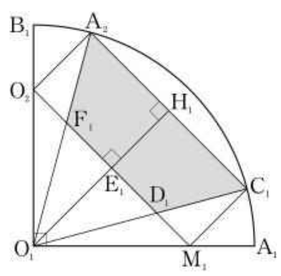
따라서 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 $\frac{8(3\sqrt{3}-\pi)}{27}$이고, 공비가 $\frac{4}{9}$인 등비수열이므로

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{\frac{8(3\sqrt{3}-\pi)}{27}}{1-\frac{4}{9}}=\frac{8(3\sqrt{3}-\pi)}{15}$$



43) [정답] ②

[해설]



점 O_1에서 선분 C_1A_2에 내린 수선의 발을 H_1이라 하고, 선분 O_1C_1, O_1H_1, O_1A_2가 선분 M_1O_2와 만나는 점을 각각 D_1, E_1, F_1이라 하자.

$\overline{O_1M_1}=\overline{O_1O_2}=\sqrt{2}$이고 삼각형 $O_1M_1O_2$는 직각이등변삼각형이므로 $\overline{O_2M_1}=2$, $\angle O_1O_2E_1=45°$이다.

삼각형 $O_1E_1O_2$도 $\angle O_1E_1O_2=90°$이므로 직각이등변삼각형이고 $\overline{O_1E_1}=1$이다.

$\overline{A_2C_1}=\overline{O_2M_1}=2$이므로 삼각형 $O_1C_1A_2$는 정삼각형이고 $\overline{O_1H_1}=\sqrt{3}$이다.

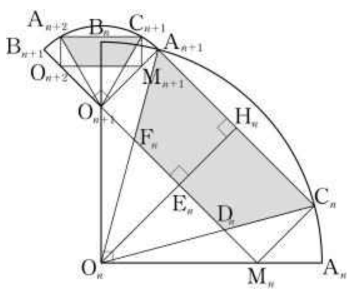
또, $\triangle O_1D_1F_1 \backsim \triangle O_1C_1A_2$이고 $\overline{O_1E_1} : \overline{O_1H_1}=1 : \sqrt{3}$이므로 두 삼각형의 넓이의 비는 $1 : 3$이다. 그러므로

$$S_1=\triangle O_1C_1A_2-\triangle O_1D_1F_1$$

$$=\triangle O_1C_1A_2-\frac{1}{3}\triangle O_1C_1A_2$$

$$=\frac{2}{3}\triangle O_1C_1A_2=\frac{2}{3}\times\left(\frac{1}{2}\times 2\times\sqrt{3}\right)$$

$$=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$



$\overline{O_nA_n}=r_n$, $\overline{O_{n+1}A_{n+1}}=r_{n+1}$이라 하면

$\overline{O_nM_n}=\overline{O_nO_{n+1}}=\frac{\sqrt{2}}{2}r_n$이다.

두 삼각형 $O_nM_nO_{n+1}$, $O_nE_nO_{n+1}$은 직각이등변삼각형이므로

$\overline{O_{n+1}M_n}=r_n$이고 $\overline{O_nE_n}=\frac{1}{2}r_n$이다.

$\overline{A_{n+1}C_n}=\overline{O_{n+1}M_n}=r_n$이므로 삼각형 $O_nC_nA_{n+1}$은 정삼각형이다. $\overline{O_nH_n}=\frac{\sqrt{3}}{2}r_n$이므로

$$r_{n+1}=\overline{E_nH_n}=\overline{O_nH_n}-\overline{O_nE_n}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}r_n-\frac{1}{2}r_n=\frac{\sqrt{3}-1}{2}r_n$$

이다.

그러므로 수열 $\{S_n\}$은 첫째항이 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$이고 공비가 $\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)^2=1-\frac{\sqrt{3}}{2}$인 등비수열의 첫째항부터 제$n$항까지의 합이다.

따라서 $\lim_{n\to\infty}S_n=\dfrac{\frac{2\sqrt{3}}{3}}{1-\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}=\frac{4}{3}$

[다른 풀이]

앞의 그림에서 $\overline{O_1M_1}=\overline{O_1O_2}=\sqrt{2}$이므로 삼각형 $O_1M_1O_2$는 직각이등변삼각형이다.

$\angle O_1M_1O_2=\angle O_1O_2M_1=45°$이고 $\angle O_1E_1M_1=90°$이므로 두 삼각형 $O_1E_1O_2$, $O_1E_1M_1$은 모두 직각이등변삼각형이고 $\overline{O_1E_1}=\overline{E_1O_2}=\overline{E_1M_1}=1$이다.

직각삼각형 $O_1H_1A_2$에서

$$\overline{O_1A_2}^2=\overline{O_1H_1}^2+\overline{H_1A_2}^2,\ 2^2=\left(1+\overline{E_1H_1}\right)^2+1^2$$

이므로 $\overline{E_1H_1}=\sqrt{3}-1$

또, $\triangle O_1E_1F_1 \backsim \triangle O_1H_1A_2$에서

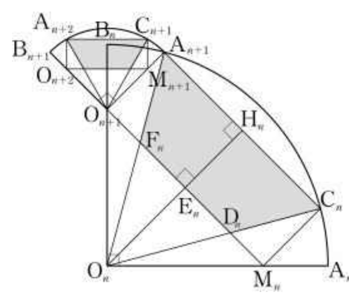
$\overline{O_1E_1} : \overline{O_1H_1}=\overline{E_1F_1} : \overline{H_1A_2}$이고 $\overline{H_1A_2}=1$이므로

$1 : \sqrt{3}=\overline{E_1F_1} : 1$에서 $\overline{D_1F_1}=2\overline{E_1F_1}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$

사각형 $A_2F_1D_1C_1$은 사다리꼴이므로

$$S_1=\frac{1}{2}\times\left(\overline{D_1F_1}+\overline{C_1A_2}\right)\times\overline{E_1H_1}$$

$$=\frac{1}{2}\times\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}+2\right)\times(\sqrt{3}-1)=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$



$\overline{O_nA_n}=r_n$, $\overline{O_{n+1}A_{n+1}}=r_{n+1}$이라 하면

$\overline{O_nM_n}=\overline{O_nO_{n+1}}=\frac{\sqrt{2}}{2}r_n$이고

$\overline{O_nE_n}=\overline{E_nO_{n+1}}=\overline{E_nM_n}=\frac{1}{2}r_n$이다.

직각삼각형 $O_nH_nA_{n+1}$에서

$\overline{O_nA_{n+1}}^2=\overline{O_nH_n}^2+\overline{H_nA_{n+1}}^2$이므로

$r_n^2=\left(\frac{1}{2}r_n+r_{n+1}\right)^2+\left(\frac{1}{2}r_n\right)^2$에서 $r_{n+1}=\frac{\sqrt{3}-1}{2}r_n$

그러므로 수열 $\{S_n\}$은 첫째항이 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$이고 공비가 $\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)^2 = 1-\frac{\sqrt{3}}{2}$인 등비수열의 첫째항부터 제 n항까지의 합이다.

따라서 $\lim_{n\to\infty} S_n = \dfrac{\frac{2\sqrt{3}}{3}}{1-\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} = \frac{4}{3}$

44) [정답] ④

[해설]

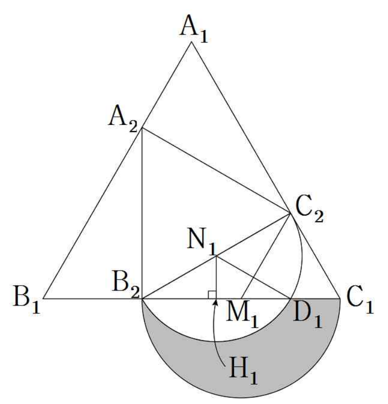
선분 B_1C_1, C_1A_1을 $1:2$로 내분하는 점이 각각 B_2, C_2이므로

$$\overline{B_2C_1}=2,\ \overline{C_1C_2}=1$$

선분 B_2C_1을 지름으로 하는 반원의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times\pi\times\left(\frac{\overline{B_2C_1}}{2}\right)^2=\frac{\pi}{2}$$

선분 B_2C_1, B_2C_2의 중점을 각각 M_1, N_1이라 하고, 선분 B_2C_2를 지름으로 하는 반원의 호와 선분 B_2C_1의 교점을 D_1이라 하자.



$\overline{M_1C_1}=\overline{C_1C_2}=1$, $\angle C_1=60^\circ$이므로

삼각형 $C_1C_2M_1$은 정삼각형

따라서 $\angle B_2M_1C_2=120^\circ$

삼각형 $M_1C_2B_2$는 $\overline{M_1B_2}=\overline{M_1C_2}=1$인 이등변삼각형이므로

$$\angle M_1C_2B_2=30^\circ$$

삼각형 $B_2C_1C_2$는 $\angle C_2=90^\circ$인 직각삼각형

$$\overline{B_2C_2}^2=\overline{B_2C_1}^2-\overline{C_1C_2}^2=4-1=3$$

$$\overline{B_2C_2}=\sqrt{3},$$

같은 방법으로 $\overline{A_2B_2}=\overline{C_2A_2}=\sqrt{3}$이므로

삼각형 $A_2B_2C_2$는 정삼각형이고, 삼각형 $N_1B_2D_1$은 $\angle B_2N_1D_1=120^\circ$, $\overline{N_1B_2}=\overline{N_1D_1}=\frac{\sqrt{3}}{2}$인 이등변삼각형

부채꼴 $N_1B_2D_1$의 넓이는

$$\pi\times\overline{B_2N_1}^2\times\frac{120^\circ}{360^\circ}=\pi\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\times\frac{1}{3}=\frac{\pi}{4}$$

점 N_1에서 선분 B_2D_1에 내린 수선의 발을 H_1이라 하면

$$\overline{N_1H_1}=\frac{\sqrt{3}}{4},\ \overline{B_2H_1}=\frac{3}{4}$$

$$\overline{B_2D_1}=2\overline{B_2H_1}=\frac{3}{2}$$

삼각형 $N_1B_2D_1$의 넓이는

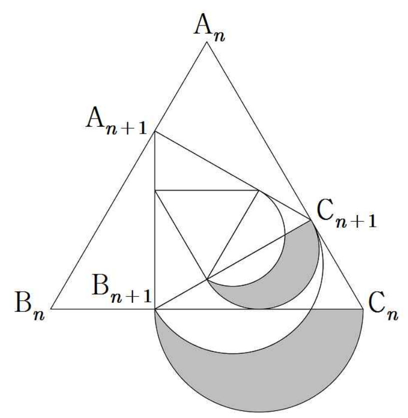
$$\frac{1}{2}\times\overline{B_2D_1}\times\overline{N_1H_1}=\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{3\sqrt{3}}{16}$$

$S_1=$(선분 B_2C_1을 지름으로 하는 반원의 넓이)
$-$(부채꼴 $N_1B_2D_1$의 넓이)
$+$(삼각형 $N_1B_2D_1$의 넓이)

$$=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}+\frac{3\sqrt{3}}{16}$$

$$=\frac{4\pi+3\sqrt{3}}{16}$$

다음은 그림 R_{n+1}의 일부이다. $(n\ge 1)$



정삼각형 $A_nB_nC_n$의 한 변의 길이를 a_n이라 하면

$$\overline{B_{n+1}C_n}=\frac{2}{3}a_n,\ \overline{C_nC_{n+1}}=\frac{1}{3}a_n$$

삼각형 $B_{n+1}C_nC_{n+1}$은 $\angle C_{n+1}=90^\circ$인 직각삼각형이므로

$$(a_{n+1})^2=\left(\frac{2}{3}a_n\right)^2-\left(\frac{1}{3}a_n\right)^2,\ a_{n+1}=\frac{1}{\sqrt{3}}a_n$$

그림 R_{n+1}에 새로 색칠된 부분의 넓이를 b_{n+1}이라 하면

$$b_{n+1}=\frac{1}{3}b_n,\ b_1=S_1$$

수열 $\{b_n\}$은 첫째항이 $\dfrac{4\pi+3\sqrt{3}}{16}$이고, 공비가 $\dfrac{1}{3}$인 등비수열이다.

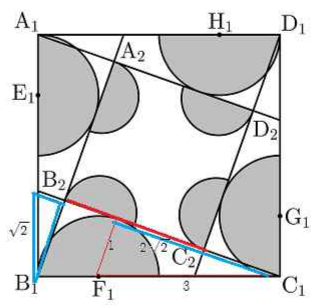
$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} b_k$$

$$=\frac{\dfrac{4\pi+3\sqrt{3}}{16}}{1-\dfrac{1}{3}}$$

$$=\frac{12\pi+9\sqrt{3}}{32}$$

45) [정답] ①

[해설]



그림과 같이 원의 접선에서

직각삼각형의 변의 길이를 각각 구하면

두 번째 정사각형의 한 변의 길이는

$\dfrac{8\sqrt{2}-4}{3}$이다.

따라서 축소비율은 $\dfrac{2\sqrt{2}-1}{3}$이므로

공비는 $\left(\dfrac{2\sqrt{2}-1}{3}\right)^2=1-\dfrac{4\sqrt{2}}{9}$이고

$S_1=2\pi$이므로 $S=\dfrac{2\pi}{1-\left(1-\dfrac{4\sqrt{2}}{9}\right)}=\dfrac{9\sqrt{2}\pi}{4}$이다.

46) [정답] ⑤

[해설]

그림 R_1에서 $\overline{AA_1}=3$, $\overline{AB_1}=5$이므로 $\overline{A_1B_1}=4$

이때 $\overline{D_1E_1}=4$, $\overline{D_1D}=2$이므로 $\angle DD_1E_1=60°$, $\angle C_1D_1E_1=30°$

$S_1=\{($부채꼴 $D_1A_1E_1)-(\triangle D_1DE_1)\}+$

$\{(\square D_1DF_1C_1)-(\triangle D_1DE_1)-($부채꼴 $D_1E_1C_1)\}$

$$=\left(\frac{8}{3}\pi-2\sqrt{3}\right)+\left(8-2\sqrt{3}-\frac{4}{3}\pi\right)=8-4\sqrt{3}+\frac{4}{3}\pi$$

한편, 정사각형 $A_nB_nC_nD_n$와 정사각형 $A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}D_{n+1}$의 한 변의 길이의 비는 $5:4$이므로 넓이의 비는 $25:16$이다.

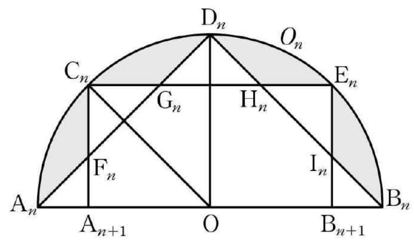
따라서 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n=\frac{8-4\sqrt{3}+\dfrac{4}{3}\pi}{1-\dfrac{16}{25}}=\frac{25}{9}\left(8-4\sqrt{3}+\frac{4}{3}\pi\right)$

$$=\frac{100}{9}\left(2-\sqrt{3}+\frac{\pi}{3}\right)$$

47) [정답] ②

[해설]

선분 A_nB_n의 중점을 O, 선분 A_nD_n이 두 선분 C_nA_{n+1}, C_nE_n과 만나는 점을 각각 F_n, G_n이라 하고, 선분 B_nD_n이 두 선분 C_nE_n, E_nB_{n+1}과 만나는 점을 각각 H_n, I_n이라 하자.



반원 O_n의 반지름의 길이를 r_n이라 하고, n번째 색칠되는 모양의 도형의 넓이를 a_n이라 하자.

두 점 C_n, D_n이 호 A_nB_n의 4등분점이므로

$\angle C_nOA_{n+1}=45°$, $\angle A_nOD_n=90°$,

$\overline{D_nA_n}=\overline{D_nB_n}$, $\angle C_nA_{n+1}O=90°$

이므로 $\overline{A_{n+1}C_n}=\dfrac{r_n}{\sqrt{2}}$

삼각형 $D_nG_nH_n$은 $\overline{D_nA_n}=\overline{D_nH_n}$인 직각삼각형이고,

$$\overline{D_nG_n}^2=2\left(\overline{OD_n}-\overline{A_{n+1}C_n}\right)^2$$

$$=2\left(r_n-\frac{r_n}{\sqrt{2}}\right)^2$$

$$=\left(\sqrt{2}-1\right)^2 r_n^2$$

$\overline{D_nG_n}=\left(\sqrt{2}-1\right)r_n$

(삼각형 $D_nG_nH_n$의 넓이)

$=2\times$(삼각형 $A_nA_{n+1}F_n$의 넓이)

두 삼각형 $A_nA_{n+1}F_n$, $B_nB_{n+1}I_n$이 합동이므로

$$\begin{aligned} a_n &= (\text{반원 } O_n\text{의 넓이}) \\ &\quad -(\text{사각형 } C_nA_{n+1}B_{n+1}E_n\text{의 넓이}) \\ &\quad -2\times(\text{삼각형 } D_nG_nH_n\text{의 넓이}) \\ &= \frac{1}{2}\pi {r_n}^2 - \overline{A_{n+1}B_{n+1}}\times\overline{A_{n+1}C_n} - \overline{D_nG_n}^2 \\ &= \frac{1}{2}\pi {r_n}^2 - \frac{2r_n}{\sqrt{2}}\times\frac{r_n}{\sqrt{2}} - (\sqrt{2}-1)^2 {r_n}^2 \\ &= \left(\frac{\pi}{2}+2\sqrt{2}-4\right)r_n^2 \end{aligned}$$

$r_{n+1}=\frac{1}{2}\overline{A_{n+1}B_{n+1}}=\overline{A_{n+1}C_n}=\frac{r_n}{\sqrt{2}}$이므로

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \left(\frac{\pi}{2}+2\sqrt{2}-4\right)r_{n+1}^2 \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}+2\sqrt{2}-4\right)r_n^2 \end{aligned}$$

따라서 수열 $\{a_n\}$은 $a_1=2\pi+8\sqrt{2}-16$이고 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비수열이므로

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} S_n &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \\ &= \frac{2\pi+8\sqrt{2}-16}{1-\frac{1}{2}} \\ &= 4\pi+16\sqrt{2}-32 \end{aligned}$$

48) [정답] ⑤

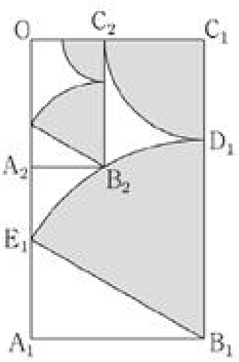
[해설]

$\overline{C_1D_1}=\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\overline{B_1D_1}=\frac{2}{\sqrt{3}}$

$\angle E_1B_1D_1=\frac{\pi}{3}$

$S_1=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2\frac{\pi}{3}$

$=\frac{11}{36}\pi$



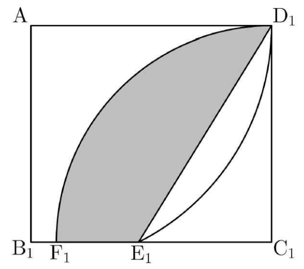
$\overline{OC_2}=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}$이므로

$r=\left(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}\right)^2=\frac{4-2\sqrt{3}}{3}$

$\therefore \lim_{n\to\infty} S_n=\frac{\frac{11}{36}\pi}{1-\frac{4-2\sqrt{3}}{3}}=\frac{1+2\sqrt{3}}{12}\pi$

49) [정답] ③

[해설]



R_1

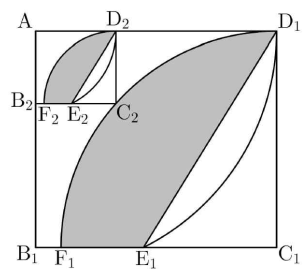
$\overline{AB_1}=2$, $\overline{AD_1}=\sqrt{5}$이고 중심이 A이고 반지름의 길이가 $\overline{AD_1}$인 원과 선분 B_1C_1의 교점을 E_1이기 때문에 $\overline{AE_1}=\sqrt{5}$이다.

이때 $\triangle AB_1E_1$는 직각삼각형이므로 피타고라스 정리에 의해서 $\overline{B_1E_1}=1$이고 $\overline{E_1C_1}=\sqrt{5}-1$이다.

색칠된 부분의 넓이는 부채꼴 $F_1C_1D_1$의 넓이에서 삼각형 $E_1C_1D_1$의 넓이를 뺀 것이므로

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{1}{4}\cdot 2^2\cdot\pi-\frac{1}{2}\cdot 2\cdot(\sqrt{5}-1) \\ &= \pi-\sqrt{5}-1 \end{aligned}$$

한편,



R_2

$\overline{AB_2}=2k$, $\overline{AD_2}=\sqrt{5}k$라 두면 $\overline{AC_2}=3k$이다.

이때 $\square AB_2C_2D_2 \backsim \square AB_1C_1D_1$이므로 점 A와 점 C_2와 점 C_1는 일직선상에 있다.

$$\overline{AC_1}=\overline{AC_2}+\overline{C_2C_1}$$

$$3=3k+2$$

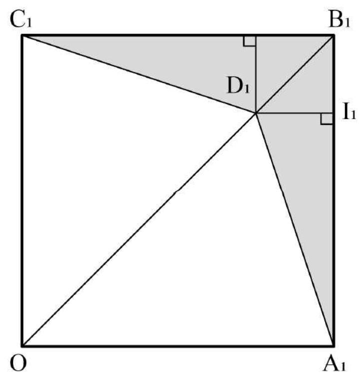
$$\therefore k=\frac{1}{3}$$

따라서 $\square AB_2C_2D_2$와 $\square AB_1C_1D_1$의 닮음비는 $1:3$이고 넓이의 비는 $1:9$이다.

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{n\to\infty} S_n &= \frac{\pi-\sqrt{5}-1}{1-\frac{1}{9}} \\ &= \frac{9\pi-9\sqrt{5}+9}{8} \end{aligned}$$

50) [정답] ③

[해설]



$\overline{OB_1}=4\sqrt{2}$이므로 $\overline{D_1B_1}=\sqrt{2}$

점 D_1에서 직선 A_1B_1에 내린 수선의 발을 I_1이라 하면

$\overline{D_1I_1}=1$

두 삼각형 $A_1B_1D_1$, $B_1C_1D_1$의 넓이는 모두 2이므로 $S_1=4$

네 선분 A_nB_n, B_nC_n, C_nD_n, D_nA_n으로 둘러싸인 ㄱ모양의 도형의 넓이를 T_n이라 하자.

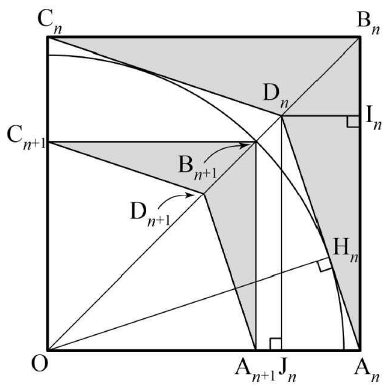


그림 R_n에서 중심이 O이고, 두 직선 A_nB_n, C_nD_n에 동시에 접하는 원과 직선 A_nD_n이 접하는 점을 H_n이라 하고, 점 D_n에서 두 직선 A_nB_n, OA_n에 내린 수선의 발을 각각 I_n, J_n이라 하자.

$\overline{A_nI_n}=\overline{D_nJ_n}=\frac{3}{4}\overline{OA_n}$, $\overline{D_nI_n}=\frac{1}{4}\overline{OA_n}$이므로

$$\overline{A_nD_n}=\frac{\sqrt{10}}{4}\overline{OA_n}$$

삼각형 OA_nD_n에서

$$\frac{1}{2}\times\overline{A_nD_n}\times\overline{OH_n}=\frac{1}{2}\times\overline{OA_n}\times\overline{D_nJ_n}$$

$$\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{10}}{4}\overline{OA_n}\times\overline{OH_n}=\frac{1}{2}\times\overline{OA_n}\times\frac{3}{4}\overline{OA_n}$$

$$\overline{OH_n}=\frac{3\sqrt{10}}{10}\overline{OA_n},$$

$$\overline{OA_{n+1}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\overline{OB_{n+1}}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\overline{OH_n}$$

$$=\frac{3\sqrt{5}}{10}\overline{OA_n}$$

두 정사각형 $OA_nB_nC_n$과 $OA_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}$의 닮음비는

$$\overline{OA_n}:\overline{OA_{n+1}}=1:\frac{3\sqrt{5}}{10}$$

즉, $T_n:T_{n+1}=1:\frac{9}{20}$이므로 $T_{n+1}=\frac{9}{20}T_n$

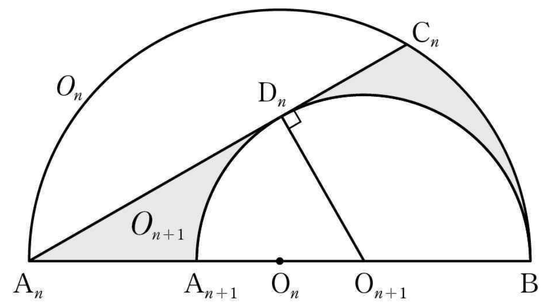
그러므로 수열 $\{T_n\}$은 첫째항이 $T_1=S_1=4$이고, 공비가 $\frac{9}{20}$인 등비수열이다.

따라서 $\lim_{n\to\infty}S_n=\sum_{n=1}^{\infty}T_n=\dfrac{4}{1-\frac{9}{20}}=\dfrac{80}{11}$

51) [정답] ②

[해설]

반원 O_n의 중심을 O_n, 반지름을 r_n이라 하자.



삼각형 $O_{n+1}A_nD_n$은 $\angle O_{n+1}A_nD_n=\frac{\pi}{6}$인 직각삼각형이므로

$\sin(\angle O_{n+1}A_nD_n)=\frac{1}{2}$

$\dfrac{\overline{D_nO_{n+1}}}{\overline{A_nO_{n+1}}}=\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{r_{n+1}}{2r_n-r_{n+1}}=\dfrac{1}{2}$

$r_{n+1}=\frac{2}{3}r_n$ …… ㉠

$r_1=1$이므로 $r_2=\frac{2}{3}$

$\angle A_1O_1C_1=\frac{2\pi}{3}$, $\overline{A_1O_1}=\overline{C_1O_1}=1$이므로

삼각형 $A_1O_1C_1$의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{A_1O_1}\times\overline{C_1O_1}\times\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{1}{2}\times1\times1\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4}$

$\angle BO_1C_1=\frac{\pi}{3}$, $\overline{C_1O_1}=\overline{BO_1}=1$이므로

부채꼴 O_1BC_1의 넓이는 $\frac{1}{2}\times1^2\times\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6}$

반원 O_2의 넓이는 $\frac{1}{2}\times(r_2)^2\times\pi=\frac{1}{2}\times\left(\frac{2}{3}\right)^2\times\pi=\frac{2\pi}{9}$

S_1=(삼각형 $A_1O_1C_1$의 넓이)+(부채꼴 O_1BC_1의 넓이)−(반원 O_2의 넓이)

$=\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{\pi}{6}-\frac{2\pi}{9}$

$= \dfrac{\sqrt{3}}{4} - \dfrac{\pi}{18}$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 수열 $\{S_n\}$은 첫째항이 $\dfrac{\sqrt{3}}{4} - \dfrac{\pi}{18}$이고 공비가 $\left(\dfrac{2}{3}\right)^2 = \dfrac{4}{9}$인 등비수열의 첫째항부터 제 n항까지의 합이다.

따라서 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \dfrac{\dfrac{\sqrt{3}}{4} - \dfrac{\pi}{18}}{1-\dfrac{4}{9}} = \dfrac{9\sqrt{3}-2\pi}{20}$

52) [정답] ③

[해설]

$S_1 = \dfrac{1}{2} \times 1^2 \times \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{8}$

그림 R_2에서 $\angle O_1A_2O_2 = \dfrac{\pi}{4}$이므로

삼각형 $O_1A_2O_2$에서 사인법칙에 의하여

$\dfrac{\overline{O_2A_2}}{\sin\frac{\pi}{6}} = \dfrac{\overline{O_1O_2}}{\sin\frac{\pi}{4}}$

$\dfrac{\overline{O_2A_2}}{\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$에서 $\overline{O_2A_2} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

즉, 부채꼴 $O_1A_1O_2$와 부채꼴 $O_2A_2O_3$은 서로 닮음이고 닮음비는 $1 : \dfrac{1}{\sqrt{2}}$이다.

따라서 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$은 첫째항이 $\dfrac{\pi}{8}$이고 공비가 $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \dfrac{1}{2}$인 등비급수의 합이므로

$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \dfrac{\frac{\pi}{8}}{1-\frac{1}{2}} = \dfrac{\pi}{4}$

53) [정답] ④

[해설]

그림 R_n에서 새로 색칠한 부분의 넓이를 a_n이라 하자.

$\angle A_nB_nD_n = \theta$라 하면

$\overline{B_1D_1} = \sqrt{1^2 + (2\sqrt{6})^2} = 5$이므로

$\sin\theta = \dfrac{\overline{A_nD_n}}{\overline{B_nD_n}} = \dfrac{\overline{A_1D_1}}{\overline{B_1D_1}} = \dfrac{2\sqrt{6}}{5}$, $\cos\theta = \dfrac{1}{5}$

두 선분 A_1G_1, G_1B_2와 호 B_2A_1로 둘러싸인 도형의 넓이는 부채꼴 $B_1B_2A_1$의 넓이에서 삼각형$A_1B_1G_1$의 넓이를 뺀 것과 같으므로

$\dfrac{1}{2} \times 1^2 \times \theta - \dfrac{1}{2} \times 1 \times \dfrac{1}{2} \times \sin\theta = \dfrac{\theta}{2} - \dfrac{\sqrt{6}}{10}$

두 선분 D_2H_1, H_1F_1과 호 F_1D_2로 둘러싸인 도형의 넓이는 부채꼴 $D_1F_1D_2$의 넓이에서 삼각형$D_1F_1H_1$의 넓이를 뺀 것과 같으므로

$\dfrac{1}{2} \times 1^2 \times \left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right) - \dfrac{1}{2} \times 1 \times \dfrac{1}{2} \times \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right)$

$= \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\theta}{2} - \dfrac{1}{20}$

그러므로

$a_1 = \left(\dfrac{\theta}{2} - \dfrac{\sqrt{6}}{10}\right) + \left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\theta}{2} - \dfrac{1}{20}\right) = \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\sqrt{6}}{10} - \dfrac{1}{20}$

$\dfrac{\overline{B_{n+1}D_{n+1}}}{\overline{B_nD_n}} = \dfrac{\overline{B_2D_2}}{\overline{B_1D_1}} = \dfrac{\overline{B_1D_1} - \left(\overline{B_1B_2} + \overline{D_1D_2}\right)}{\overline{B_1D_1}} = \dfrac{3}{5}$

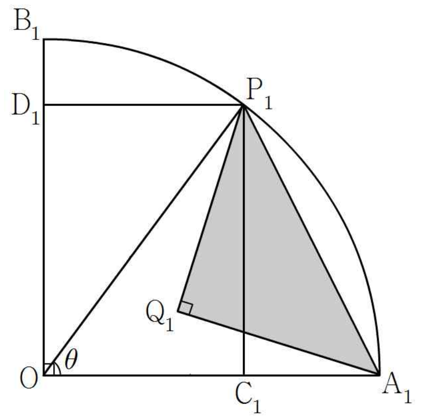
두 직사각형 $A_nB_nC_nD_n$과 $A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}D_{n+1}$의 닮음비는 $5:3$이므로 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \left(\dfrac{3}{5}\right)^2 = \dfrac{9}{25}$

수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 a_1이고 공비가 $\dfrac{9}{25}$인 등비수열이므로

$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \dfrac{a_1}{1-\frac{9}{25}} = \dfrac{25\pi - 10\sqrt{6} - 5}{64}$

54) [정답] ②

[해설]



$\angle P_1OA_1 = \theta$라 하면 $\cos\theta = \dfrac{3}{5}$

삼각형 P_1OA_1에서 코사인법칙에 의해

$\overline{P_1A_1}^2 = 1^2 + 1^2 - 2 \times 1 \times 1 \times \cos\theta$

$= \dfrac{4}{5}$

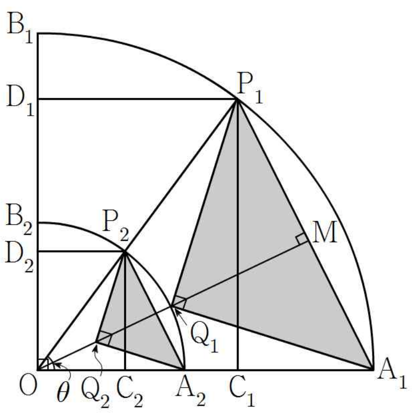
$\therefore \overline{P_1A_1} = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

삼각형 $P_1Q_1A_1$은 직각이등변삼각형이므로

$\overline{P_1Q_1} = \overline{Q_1A_1} = \dfrac{\sqrt{10}}{5}$

따라서 삼각형 $P_1Q_1A_1$의 넓이

$$S_1 = \frac{1}{2} \times \left(\frac{\sqrt{10}}{5} \right)^2 = \frac{1}{5}$$



한편, 점 O에서 선분 P_1A_1에 내린 수선의 발을 M이라 하면 삼각형 P_1OA_1의 넓이에서

$$\frac{1}{2} \times \overline{OA_1} \times \overline{P_1C_1} = \frac{1}{2} \times \overline{OM} \times \overline{P_1A_1}$$

$$\frac{1}{2} \times 1 \times \frac{4}{5} = \frac{1}{2} \times \overline{OM} \times \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$\therefore \ \overline{OM} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

또한, 삼각형 $P_1Q_1A_1$은 직각이등변삼각형이므로

$$\overline{Q_1M} = \overline{P_1M} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

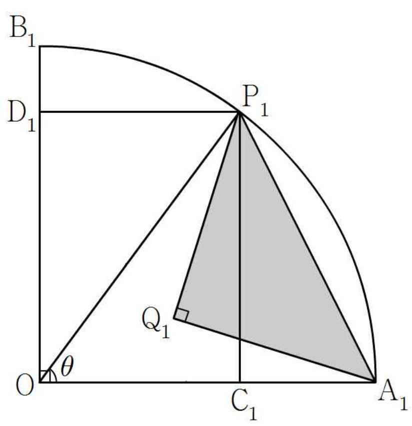
$$\therefore \ \overline{OQ_1} = \overline{OM} - \overline{Q_1M} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

두 사분원의 반지름의 비는 $\frac{\sqrt{5}}{5}$이므로 색칠한 삼각형의 넓이의 비는 $\frac{1}{5}$이다.

따라서 수열 $\{S_n\}$은 첫째항이 $\frac{1}{5}$, 공비가 $\frac{1}{5}$인 등비수열의 합이므로

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{5}} = \frac{1}{4}$$

[다른 풀이]

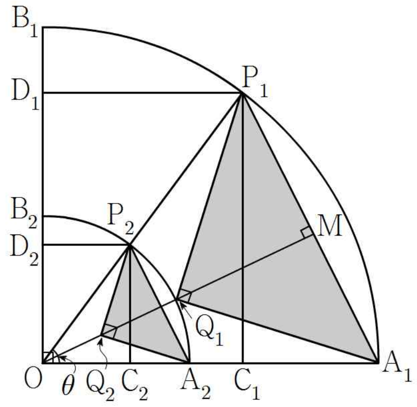


$\angle P_1OA_1 = \theta$라 하면 $\cos\theta = \frac{3}{5}$이므로

$$\overline{OC_1} = \frac{3}{5}, \ \overline{C_1A_1} = \frac{2}{5}, \ \overline{P_1C_1} = \frac{4}{5}$$

삼각형 $P_1C_1A_1$은 직각삼각형이므로

$$\overline{P_1A_1} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$



점 O에서 선분 P_1A_1에 내린 수선의 발을 M이라 하면, 삼각형 P_1Q_1M은 직각이등변삼각형이므로

$$\overline{Q_1M} = \overline{P_1M} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

삼각형 P_1OM은 직각삼각형이므로

$$\overline{OM} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$\overline{OQ_1} = \overline{OM} - \overline{Q_1M} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

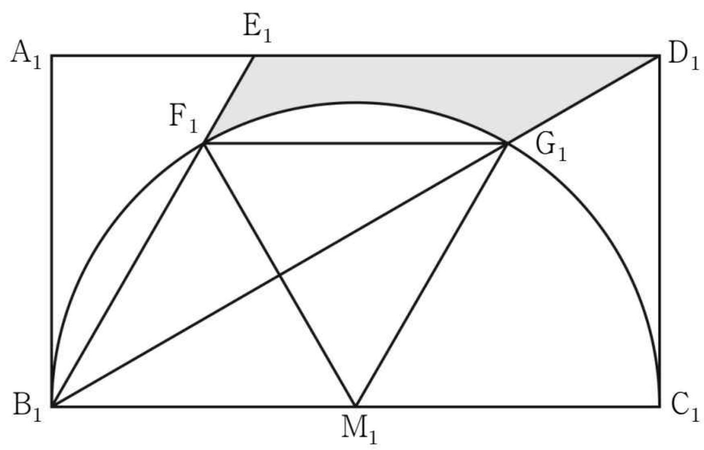
두 사분원의 반지름의 비는 $\frac{\sqrt{5}}{5}$이므로 색칠한 삼각형의 넓이의 비는 $\frac{1}{5}$이다.

따라서 수열 $\{S_n\}$은 첫째항이 $\frac{1}{5}$, 공비가 $\frac{1}{5}$인 등비수열의 합이므로

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{5}} = \frac{1}{4}$$

55) [정답] ②

[해설]



선분 B_1C_1의 중점을 M_1이라 하자.

삼각형 $B_1C_1D_1$에서 $\tan(\angle C_1B_1D_1)=\dfrac{\overline{C_1D_1}}{\overline{B_1C_1}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

이므로 $\angle C_1B_1G_1=\dfrac{\pi}{6}$이고 $\angle C_1M_1G_1=\dfrac{\pi}{3}$ ······㉠

점 E_1은 선분 A_1D_1을 $1:2$로 내분하는 점이므로

$\overline{A_1E_1}=2\sqrt{3}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

삼각형 $A_1B_1E_1$에서 $\tan(\angle E_1B_1A_1)=\dfrac{\overline{A_1E_1}}{\overline{A_1B_1}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

이므로 $\angle E_1B_1A_1=\dfrac{\pi}{6}$

$\angle G_1B_1E_1=\dfrac{\pi}{2}-\angle C_1B_1G_1-\angle E_1B_1A_1=\dfrac{\pi}{6}$에서

$\angle G_1M_1F_1=\dfrac{\pi}{3}$ ······㉡

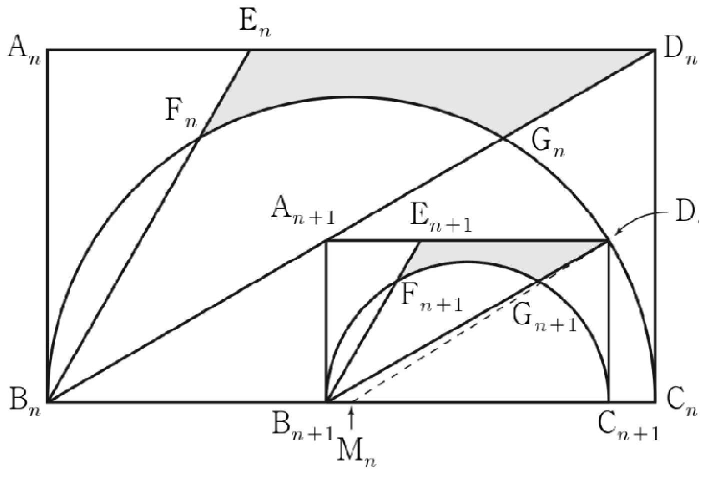
㉠, ㉡에서 두 삼각형 $B_1M_1F_1$, $F_1M_1G_1$은 모두 정삼각형이므로 $\angle F_1M_1B_1=\angle M_1F_1G_1$이 되어 두 선분 F_1G_1, B_1C_1은 서로 평행하다.

삼각형 $B_1G_1F_1$의 넓이는 삼각형 $F_1M_1G_1$의 넓이와 같고, 두 선분 B_1F_1, B_1G_1과 호 F_1G_1로 둘러싸인 부분의 넓이는 부채꼴 $F_1M_1G_1$의 넓이와 같으므로

$$S_1=\left(\frac{1}{2}\times\frac{4\sqrt{3}}{3}\times2\right)-\left\{\frac{1}{2}\times(\sqrt{3})^2\times\frac{\pi}{3}\right\}$$

$$=\frac{4\sqrt{3}}{3}-\frac{\pi}{2}$$

다음은 그림 R_{n+1}의 일부이다.



선분 B_nC_n의 중점을 M_n이라 하자.

$\overline{A_nB_n}=a_n$, $\overline{A_{n+1}B_{n+1}}=a_{n+1}$이라 하면

$\overline{A_nB_n}:\overline{B_nC_n}=1:\sqrt{3}$에서 $\overline{B_nC_n}=\sqrt{3}a_n$이고

$\overline{A_{n+1}B_{n+1}}:\overline{B_{n+1}C_{n+1}}=1:\sqrt{3}$에서

$\overline{B_{n+1}C_{n+1}}=\sqrt{3}a_{n+1}$이다.

직각삼각형 $B_nB_{n+1}A_{n+1}$에서

$\overline{B_nB_{n+1}}=\dfrac{\overline{A_{n+1}B_{n+1}}}{\tan\dfrac{\pi}{6}}=\sqrt{3}a_{n+1}$이므로

$\overline{B_nC_{n+1}}=\overline{B_nB_{n+1}}+\overline{B_{n+1}C_{n+1}}=2\sqrt{3}a_{n+1}$

직각삼각형 $M_nC_{n+1}D_{n+1}$에서

$\overline{M_nC_{n+1}}^2+\overline{C_{n+1}D_{n+1}}^2=\overline{M_nD_{n+1}}^2$

이고 $\overline{M_nD_{n+1}}=\dfrac{1}{2}\overline{B_nC_n}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}a_n$이므로

$(\overline{B_nC_{n+1}}-\overline{B_nM_n})^2+\overline{C_{n+1}D_{n+1}}^2=\dfrac{3}{4}a_n^2$

$\left(2\sqrt{3}a_{n+1}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}a_n\right)^2+a_{n+1}^2=\dfrac{3}{4}a_n^2$

$13{a_{n+1}}^2-6a_na_{n+1}=0$

$a_{n+1}=\dfrac{6}{13}a_n$이므로 두 사각형 $A_nB_nC_nD_n$과

$A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}D_{n+1}$의 닮음비가 $13:6$이고

넓이의 비는 $169:36$이다.

따라서 S_n은 첫째항이 $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}-\dfrac{\pi}{2}$이고

공비가 $\dfrac{36}{169}$인 등비수열의 첫째항부터 제 n항까지의

합이므로

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{\dfrac{4\sqrt{3}}{3}-\dfrac{\pi}{2}}{1-\dfrac{36}{169}}=\frac{169}{798}(8\sqrt{3}-3\pi)$$

56) [정답] 13

[해설]

A_1의 넓이는 $1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{3}{4}$

도형 A_1과 도형 A_n 위에 붙인 도형의 조각들은 모두 닮은꼴이고, n번째 조각과 $(n+1)$번째 조각의 닮음비는 $4:1$이다. 즉, 넓이의 비는 $16:1$이다.

또, 조각의 개수는 2배씩 늘어나므로

$$S_n=\frac{3}{4}+\frac{3}{4}\times\frac{1}{16}\times2+\frac{3}{4}\times\left(\frac{1}{16}\right)^2\times4+\cdots$$

$$=\frac{3}{4}+\frac{3}{4}\times\frac{1}{8}+\frac{3}{4}\times\left(\frac{1}{8}\right)^2+\cdots$$

$$\therefore\lim_{n\to\infty}S_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{4}\cdot\left(\frac{1}{8}\right)^{n-1}=\frac{\dfrac{3}{4}}{1-\dfrac{1}{8}}=\frac{6}{8-1}$$

$=\frac{6}{7}$ $\therefore$ $p+q=7+6=13$

57) [정답] 6

[해설]

$l_0=1\times 2$

$l_1=1\times 2+\left(\frac{1}{3}\right)\times 2^2$

$l_2=1\times 2+\left(\frac{1}{3}\right)\cdot 2^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot 2^3+\cdots$

$\vdots$

$\therefore$ 첫째항 2, 공비 $\frac{2}{3}$인 무한등비급수

$S=\frac{2}{1-\frac{2}{3}}=6$

58) [정답] ⑤

[해설]

R_1의 정사각형의 한 변의 길이를 a라 하면 빗변의 길이는 $3a$이므로 $3a=\sqrt{2}$에서 $a=\frac{\sqrt{2}}{3}$ $\therefore$ $S_1=a^2=\frac{2}{9}$

R_1에서 합동인 2개의 직각이등변삼각형의 한 등변의 길이는 $a=\frac{\sqrt{2}}{3}$이므로 R_1에서 새로 색칠된 정사각형의 한 변의 길이는 $\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2=\frac{2}{9}$이다.

따라서 R_1에서 새로 색칠한 2개의 정사각형의 넓이의 합은 $2\times\left(\frac{2}{9}\right)^2$이다. $\therefore$ $S_2=S_1+2\times\left(\frac{2}{9}\right)^2=\frac{2}{9}+\frac{2}{9}\times\frac{4}{9}$

R_2에서 합동인 2^2개의 직각이등변삼각형의 한 등변의 길이는 $\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2=\frac{2}{9}$이므로 R_2에서 새로 색칠된 정사각형의 한 변의 길이는 $\frac{\sqrt{2}}{3}\times\frac{2}{9}$이다.

따라서 R_2에서 새로 색칠한 2^2개의 정사각형의 넓이의 합은 $2^2\times\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\times\frac{2}{9}\right)^2=4\times\frac{2}{9}\times\left(\frac{2}{9}\right)^2$이다.

$\therefore$ $S_3=S_2+\frac{2}{9}\times\left(\frac{4}{9}\right)^2=\frac{2}{9}+\frac{2}{9}\times\frac{4}{9}+\frac{2}{9}\times\left(\frac{4}{9}\right)^2$

$\cdots$

이와 같은 방법으로 수열 $\{S_n\}$은 첫째항이 $\frac{2}{9}$이고, 공비가 $\frac{4}{9}$인 등비수열의 첫째항부터 제 n항까지의 합과 같음을 추론할 수 있다.

$\therefore$ $\lim_{n\to\infty}S_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{9}\left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}=\frac{\frac{2}{9}}{1-\frac{4}{9}}=\frac{2}{5}$

59) [정답] ①

[해설]

그림에서 알 수 있듯이 S_1은

$S_1=\pi\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}\pi$

각 변을 2^n 등분 하였을 때 그려지는 반지름은 $\frac{1}{2^n}$, 반원의 개수는 $\frac{4(2^n-2)}{2}$, 사분원이 4 개 이므로

$S_n=(2^n-2)\cdot\pi\left(\frac{1}{2^n}\right)^2+\pi\left(\frac{1}{2^n}\right)^2$

$=(2^n-1)\pi\left(\frac{1}{2^n}\right)^2$

$=\pi\left(\frac{1}{2^n}-\frac{1}{4^n}\right)$

따라서,

$\sum_{n=1}^{\infty}S_n=\sum_{n=1}^{\infty}\pi\left(\frac{1}{2^n}-\frac{1}{4^n}\right)$

$=\pi\left(\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}-\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}\right)$

$=\frac{2}{3}\pi$

60) [정답] ④

[해설]

$S_1=2+\frac{\pi}{2}$

$S_2=\frac{\pi}{2}+\left(1+\frac{\pi}{4}\right)=1+\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$

$S_3=\frac{\pi}{2}+\left(\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{8}\right)=\frac{1}{2}+\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{8}\right)$

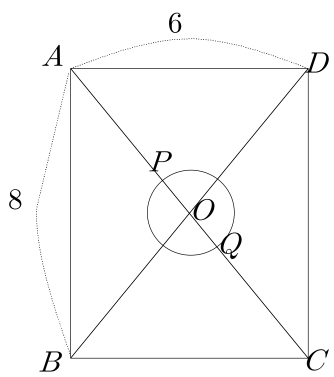
⋮

$S_n=2\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{8}+\cdots+\frac{\pi}{2^n}\right)$이므로

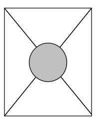
$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{\frac{\pi}{2}}{1-\frac{1}{2}}=\pi$

61) [정답] ⑤

[해설]



$\overline{AC}=10$, $\overline{PQ}=2$이므로 $\overline{AP}=\frac{1}{2}(10-2)=4$

따라서,  모양의 닮은 도형들을 크기순으로 나열할 때, 인접하는 두 도형의 닮음비는

$10:4=5:2$이고, 넓이의 비는 $25:4$이다.

R_1에 있는 원의 넓이는 π이고, 닮은꼴의 원의 개수는 크기순으로 $1,4,4^2,4^3,\cdots$ 이므로

$\lim_{n\to\infty}S_n=\pi+4\times\frac{4}{25}\pi+4^2\times\left(\frac{4}{25}\right)^2\pi+4^3\times\left(\frac{4}{25}\right)^3\pi+\cdots$

$=\frac{\pi}{1-\frac{16}{25}}=\frac{25}{9}\pi$

62) [정답] ⑤

[해설]

입체의 부피를 V_n이라하면 $V_1=1$,

$V_2=1+5\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3$

$V_3=1+5\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3+5\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^6$, $\cdots$ 이므로

$\lim_{n\to\infty}V_n=1+\frac{5\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^3}=\frac{12}{7}$

63) [정답] ①

[해설]

$a_1=1+\frac{1}{3}\times2=1+\frac{2}{3}$,

$a_2=a_1+\left(\frac{1}{3}\right)^2\times2^2=1+\frac{2}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^2$,

$a_3=a_2+\left(\frac{1}{3}\right)^3\times2^3=1+\frac{2}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^3$,

$\cdots$

$\therefore\ \lim_{n\to\infty}a_n=1+\frac{2}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\cdots=\frac{1}{1-\frac{2}{3}}=3$

64) [정답] 59

[해설]

지름이 6인 원의 넓이를 A_0, $(A_0=9\pi)$

C_1에서 그려진 2개 원의 넓이의 합을 A_1,

C_2에서 그려진 4개의 원의 넓이의 합을 $A_2,\cdots$

C_n에서 그려진 2^n개의 원의 넓이의 합을 A_n이라 하자.

C_1에서 바깥 원을 O_1, O_1의 내부에 내접하는 두 원을 크기 순서대로 O_2, O_3라 하면

넓이의 비는 $9:4:1$이므로 $A_1=\frac{5}{9}A_0$이다.

C_n에서 한 원과 그 원에 내접하는 두 원의 넓이의 비가 O_1, O_2, O_3의 넓이의 비와 같으므로

$A_n=\frac{5}{9}A_{n-1}$이다.

따라서 C_n에서 색칠된 부분의 넓이를 S_n이라 하면

$\lim_{n\to\infty}S_n=A_0\left\{\frac{5}{9}-\left(\frac{5}{9}\right)^2+\left(\frac{5}{9}\right)^3-\left(\frac{5}{9}\right)^4+\cdots\right\}$

$=\frac{45}{14}\pi$이다. $\therefore p+q=59$

65) [정답] ②

[해설]

R_1에서 색칠한 도형의 넓이 S_1은 선분 AP_2를 지름으로 하는 원의 넓이에서 선분 AP_1을 지름으로 하는 원의 넓이를 뺀 값이므로 $S_1=2^2\pi-1^2\pi=3\pi$

R_n과 R_{n+1}에서 R_{n+1}에 새롭게 생기는 원의 지름의 길이는 R_n에 새롭게 생기는 원의 지름의 길이의 $\frac{1}{3}$이고, R_{n+1}에서 새롭게 생기는 원의 개수는 2^n개 이다.

따라서 R_{n+1}에서 새롭게 생기는 모든 원의 넓이의 합은 R_n에서 새롭게 생기는 모든 원의 넓이 합의 $\frac{1}{3^2}\times 2=\frac{2}{9}$ 배이다.

$$\therefore \lim_{n\to\infty}S_n=\sum_{n=1}^{\infty}3\pi\left(\frac{2}{9}\right)^{n-1}=\frac{3\pi}{1-\frac{2}{9}}=\frac{27}{7}\pi$$

66) [정답] ③

[해설]

D_n에서 새로 만들어진 원의 개수를 a_n이라 하면

$a_1=1,\ a_{n+1}=2a_n+3\ (n=1,2,3,\cdots)$이다.

$a_n=2^{n+1}-3$이고

D_1에 있는 원의 넓이는 $\frac{\pi}{4}$, D_1에서 새로 만들어진

D_2에 있는 한 개의 내접원의 넓이는 $\frac{\pi}{4^2}$, $\cdots$

D_{n-1}에서 새로 만들어진 D_n에 있는 한 개의

내접원의 넓이는 $\frac{\pi}{4^n}$이므로 D_n에 있는 모든 원의 넓이의 합을 S_n이라하면

$S_n=(2^2-3)\cdot\frac{\pi}{4}+(2^3-3)\cdot\frac{\pi}{4^2}+\cdots+(2^{n+1}-3)\cdot\frac{\pi}{4^n}$이다.

따라서 $S_n=\sum_{k=1}^{n}\left\{(2^{k+1}-3)\cdot\frac{\pi}{4^k}\right\}$

$=\pi\sum_{k=1}^{n}\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}-\frac{3}{4}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{k-1}\right\}$

그러므로 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}S_n=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}-\frac{\frac{3}{4}}{1-\frac{1}{4}}=1$

67) [정답] ②

[해설]

도형 R_1에서 색칠된 직사각형의 가로의 길이를 x라 하면

$2x+\frac{1}{4}\times 5=5\ \therefore\ x=\frac{15}{8}$

또, 세로의 길이를 y라 하면 $2y+\frac{1}{5}\times 4=4\ \therefore y=\frac{8}{5}$

그러므로 $S_1=4\times\frac{15}{8}\times\frac{8}{5}=12$

한편, 색칠된 하나의 직사각형의 가로의 길이, 세로의 길이는 각각 $\frac{3}{8}$, $\frac{2}{5}$인 등비수열을 이루고 직사각형의 개수는 공비가 4인 등비수열을 이룬다.

따라서, 수열 $\{S_n\}$은 첫째항이 12, 공비가 $4\times\frac{3}{8}\times\frac{2}{5}$ 즉, $\frac{3}{5}$인 등비수열을 이루므로 $\sum_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{12}{1-\frac{3}{5}}=30$

68) [정답] ②

[해설]

그림 R_n에서 새로 색칠된 부분의 넓이의 합을 a_n이라 하자.

그림 R_1에서 반지름의 길이가 1인 원에 내접하는 직사각형의 세로의 길이를 k라 하면 가로의 길이는 $3k$이고, 대각선의 길이가 원의 지름의 길이인 2이므로

$k^2+(3k)^2=2^2=4,\ 10k^2=4$

$\therefore\ k=\frac{\sqrt{10}}{5}\ (\because\ k>0)$

$\therefore\ a_1=S_1=\pi\times 1^2-\frac{\sqrt{10}}{5}\times\frac{3\sqrt{10}}{5}=\pi-\frac{6}{5}$

그림 R_n에서 새로 그려진 원의 반지름의 길이를 r_n이라 하면

$r_{n+1}=\frac{\sqrt{10}}{5}\times\frac{1}{2}r_n=\frac{\sqrt{10}}{10}r_n$

이고, 새로 그려진 원의 개수는 2^{n-1}이므로 수열 $\{a_n\}$은

첫째항이 $\pi-\frac{6}{5}$, 공비가 $\frac{1}{5}$인 무한등비수열이다.

따라서 $S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$이므로

$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n)$

$=\frac{\pi-\frac{6}{5}}{1-\frac{1}{5}}=\frac{\frac{5\pi-6}{5}}{\frac{4}{5}}=\frac{5\pi-6}{4}=\frac{5}{4}\pi-\frac{3}{2}$

69) [정답] ④

[해설]

R_1에서 주어진 원의 반지름의 길이가 1이므로 넓이는 π 이고 긴 대각선의 길이는 8이다.

이 때 R_2에서 새로 생긴 마름모의 긴 대각선의 길이가 3이므로 짧은 대각선의 길이는 $\frac{3}{2}$

이다. 따라서 이 마름모 안에 새로 생긴 원의 반지름의 길이는 $\frac{3}{8}$이므로 R_2에 들어 있는 원의 넓이의 합은

$\pi+2\times\left(\frac{3}{8}\right)^2\pi$ 이다.

같은 방법으로 R_n에 들어 있는 모든 원의 넓이의 합S_n을 구하면

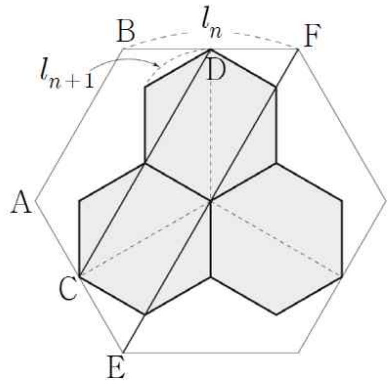
$S_n=\pi+2\times\frac{9}{64}\pi+4\times\left(\frac{9}{64}\right)^2\pi+\ \cdots\ +2^{n-1}\times\left(\frac{9}{64}\right)^n\pi$

$=\frac{\pi\left(1-\left(\frac{9}{32}\right)^n\right)}{1-\frac{9}{32}}\ \therefore\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{\pi}{1-\frac{9}{32}}=\frac{32}{23}\pi$

70) [정답] ④

[해설]

H_n의 한 정육각형의 한 변의 길이를 l_n이라 하고 H_{n+1}의 한 정육각형의 한 변의 길이를 l_{n+1}이라 하자.



$2\overline{AB}=\overline{EF}$이므로 $\frac{3}{2}\overline{AB}=\overline{CD}$이다.

$\frac{3}{2}l_n=4\times\frac{\sqrt{3}}{2}l_{n+1}$이 성립하므로, $l_{n+1}=\frac{\sqrt{3}}{4}l_n$에서

$S_{n+1}=3\times\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2S_n=\frac{9}{16}S_n$

수열 $\{S_n\}$은

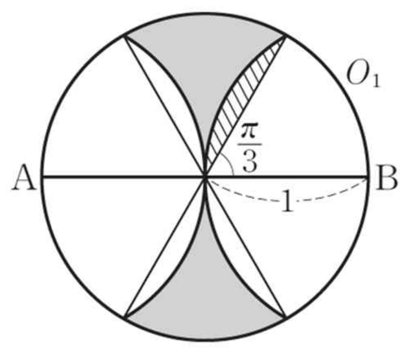
$S_1=\frac{\sqrt{3}}{4}\times\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2\times6\times3=\frac{27}{32}\sqrt{3}$ 이고, 공비가

$\frac{9}{16}$인 무한등비수열이다.

따라서 $\sum_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{\frac{27}{32}\sqrt{3}}{1-\frac{9}{16}}=\frac{27}{14}\sqrt{3}$

71) [정답] ②

[해설]



빗금 친 부분의 넓이는 6등분한 원의 넓이에서 한 변의 길이가 1인 정삼각형의 넓이를 뺀 것과 같으므로

$\frac{1}{6}\times\pi-\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{2\pi-3\sqrt{3}}{12}$

그러므로 ⌛ 모양의 어두운 부분의 넓이는 3등분한 원의 넓이에서 빗금 친 부분의 넓이 4개를 뺀 것과 같다.

$S_1=\frac{\pi}{3}-\frac{2\pi-3\sqrt{3}}{3}=\frac{3\sqrt{3}-\pi}{3}$

원 O_n에서 원의 지름의 길이를 2등분한 선분을 지름으로 하는 두 원 중 한 원을 O_{n+1}이라 하면 O_n과 O_{n+1}의 닮음비는 $2:1$이므로 넓이의 비는 $4:1$이다.

원 O_n 안에 원 O_{n+1}이 2개씩 생기므로 새로 생기는 두 원의 모양의 어두운 부분의 넓이의 합은 O_n의 모양의 어두운 부분의 넓이의 $\frac{1}{2}$이다.

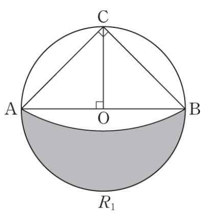
즉, 수열 S_n은 첫째항이 $\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$이고, 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비수열이다. $\therefore \lim_{n\to\infty} S_n=\dfrac{\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}}{1-\frac{1}{2}}=2\sqrt{3}-\frac{2}{3}\pi$

72) [정답] ③

[해설]

오른쪽 그림에서 $\overline{OA}=\overline{OC}=1$ 이므로

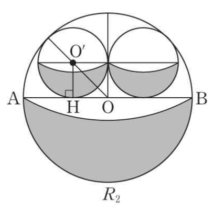
$\overline{AC}=\sqrt{\overline{OC}^2+\overline{OA}^2}=\sqrt{2}$ $\angle ACB=90^\circ$ 이므로 선분 AC를 반지름으로 하는 부채꼴 CAB의



넓이는 $\frac{1}{2}\cdot(\sqrt{2})^2\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}$이고,

삼각형 ABC의 넓이는 $\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2}=1$이다.

따라서 부채꼴 CAB에서 삼각형 ABC를 제외한 부분의 넓이는 $\frac{\pi}{2}-1$ $\therefore S_1=\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{2}-1\right)=1$이다.



오른쪽 그림에서 원 O′의 반지름을 r라 하고, 원 O′의 중심에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H라 하면 삼각형 OO′H에서

$\overline{O'H}=r$, $\overline{O'O}=1-r$,

$\overline{OH}=r$이므로

$(1-r)^2=r^2+r^2, r^2+2r-1=0$

$\therefore r=-1+\sqrt{2}$ $(\because r>0)$

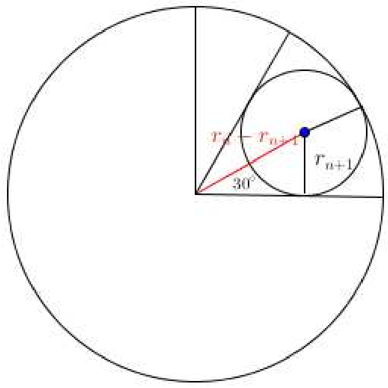
따라서 원 O와 원 O′의 닮음비가 $1:(-1+\sqrt{2})$이므로 넓이의 비는 $1:(3-2\sqrt{2})$ 또한 새로 생기는 원의 개수는 직전 원의 개수의 2배이므로

$\therefore \lim_{n\to\infty} S_n=1+2(3-2\sqrt{2})+2^2(3-2\sqrt{2})^2+\cdots$

$=\dfrac{1}{1-2(3-2\sqrt{2})}=\dfrac{1}{-5+4\sqrt{2}}=\dfrac{5+4\sqrt{2}}{7}$

73) [정답] ③

[해설]



삼각비에 의하여 $(r_n-r_{n+1}:r_{n+1})=2:1$ 이므로

$r_{n+1}=\frac{1}{3}r_n$, $r_1=1$

$r_n=\dfrac{1}{3^{n-1}} \Rightarrow S_n=\left(\dfrac{1}{3^{n-1}}\right)^2\cdot 4^{n-1}\pi=\dfrac{\pi}{3}\left(\dfrac{4}{9}\right)^{n-1}$

$\lim_{n\to\infty} S_n=\dfrac{\frac{\pi}{3}}{1-\frac{4}{9}}=\frac{3}{5}\pi$ $\therefore \frac{3}{5}\pi$

74) [정답] ③

[해설]

R_1에 있는 원의 반지름의 길이는 $2-\sqrt{2}$이므로

$S_1=(2-\sqrt{2})^2\pi$

R_2에 있는 작은 정사각형의 한 변의 길이를 x라 하면

$\overline{AC}=2\sqrt{2}x+2(2-\sqrt{2})=2\sqrt{2}$ $\therefore x=2-\sqrt{2}$

R_1에 있는 원과 R_2에 있는 작은 원의 넓이의 비는

$2^2:(2-\sqrt{2})^2=1:\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$ 따라서 R_n과 R_{n+1}에서 각각 새로 그려지는 두 원의 넓이의 비는 $1:\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$이고 원의 개수의 비는 $1:2$이다. 그러므로 구하는 무한급수의 합은

첫째항이 $S_1=(2-\sqrt{2})^2\pi$ 이고, 공비가

$2\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=3-2\sqrt{2}$ 인 무한등비급수의 합과 같다.

$$\therefore \lim_{n\to\infty} S_n=\frac{(2-\sqrt{2})^2\pi}{1-(3-2\sqrt{2})}=(\sqrt{2}-1)\pi$$

75) [정답] ②

[해설]

그림 R_1에서 $\overline{OA}=3$, $\overline{OD}=1$, $\angle AOD=\frac{\pi}{4}$이므로

$$S_1=2\times\left(\frac{1}{2}\times3\times1\times\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

그림 R_n에서 새로 그려진 반원에 내접하는 원의 반지름의

길이를 r_n, 새로 만들어진 모든 의 넓이를 T_n이라 하면

$$T_n=2^n\times\left(\frac{1}{2}\times r_n\times\frac{1}{3}r_n\times\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{3}\cdot2^{n-2}\cdot{r_n}^2$$

그림 R_{n+1}에서 $r_{n+1}=\frac{1}{4}r_n$

$$T_{n+1}=2^{n+1}\times\left(\frac{1}{2}\times r_{n+1}\times\frac{1}{3}r_{n+1}\times\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{3}\cdot2^{n-5}\cdot{r_n}^2$$

$$\therefore \frac{T_{n+1}}{T_n}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{3}\cdot2^{n-5}\cdot{r_n}^2}{\frac{\sqrt{2}}{3}\cdot2^{n-2}\cdot{r_n}^2}=2^{-3}=\frac{1}{8}$$

따라서, S_n은 첫째항이 $\frac{3\sqrt{2}}{2}$이고 공비가 $\frac{1}{8}$인 등비수열의

합이므로

$$\lim_{n\to\infty} S_n=\frac{\frac{3\sqrt{2}}{2}}{1-\frac{1}{8}}=\frac{12\sqrt{2}}{7}$$

76) [정답] ①

[해설]

마름모의 성질에 의하여 마름모 ADEF의

두 대각선이 만나는 점과 원의 중심이 일치하므로

$\overline{OE}=\frac{1}{2}\overline{AE}=2\sqrt{3}$

$\angle EOP=\frac{\pi}{3}$이므로 $\overline{OP}=\sqrt{3}$, $\overline{PE}=3$

사각형 OPEQ의 넓이 $S_1=3\sqrt{3}$

그림 R_n에서 새로 그려진 정삼각형의 한 변의

길이를 a_n이라 하면

$$a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n$$

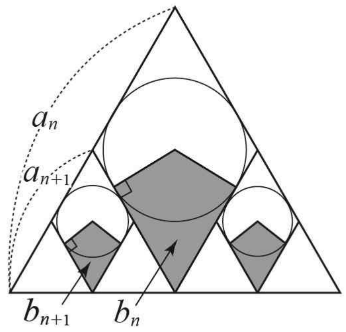


그림 R_n에 색칠한 한 개의 사각형의 넓이를

b_n이라 하면

$$b_{n+1}=\frac{1}{4}b_n$$

그림 R_{n+1}에서 새로 그려진 사각형의 개수는 그림 R_n에서

새로 그려진 사각형의 개수의 2배이다.

그러므로 S_n은 첫째항이 $3\sqrt{3}$ 이고 공비가 $\frac{1}{2}$인

등비수열의 첫째항부터 제n항까지의 합이다.

따라서 $\lim_{n\to\infty} S_n=\frac{3\sqrt{3}}{1-\frac{1}{2}}=6\sqrt{3}$

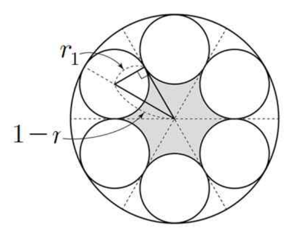
77) [정답] ②

[해설]

그림 R_n에서 가장 작은 원의 반지름의 길이를 r_n이라 하고,

그림 R_n을 얻는 과정에서 그린 모든 모양들의 넓이의

합을 a_n이라 하자.



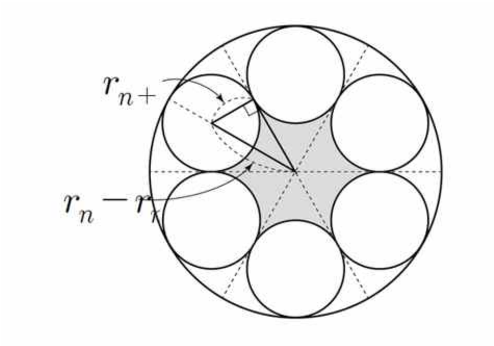
위의 그림에서 $(1-r_1):r_1=2:1$이므로 $r_1=\frac{1}{3}$이다. S_1은

직각삼각형의 넓이에서 반지름의 길이가 $\frac{1}{3}$이고 중심각의

크기가 60° 인 부채꼴의 넓이를 뺀 값의 12배와 같으므로

$$S_1=\left\{\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{3}-\pi\times\left(\frac{1}{3}\right)^2\times\frac{60^\circ}{360^\circ}\right\}\times 12=\frac{6\sqrt{3}-2\pi}{9}$$

이다.



(r_n-r_{n+1}) : $r_{n+1}=2$: 1 이므로 $r_{n+1}=\frac{1}{3}r_n$ 이다.

a_{n+1} : $a_n=6(r_{n+1})^2$: $(r_n)^2$ 이므로

$a_{n+1}=6\times\left(\frac{1}{3}\right)^2a_n=\frac{2}{3}a_n$, $a_1=S_1$ 이다.

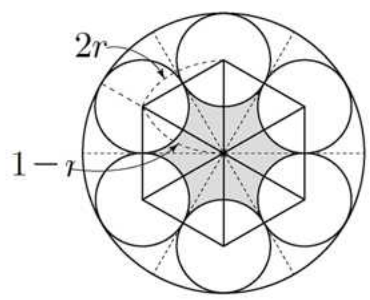
$$\lim_{n\to\infty}S_n=\sum_{n=1}^{\infty}a_n$$

$$=\frac{a_1}{1-\frac{2}{3}}=\frac{S_1}{1-\frac{2}{3}}$$

$$=2\sqrt{3}-\frac{2}{3}\pi$$

따라서 $a=2$, $b=-\frac{2}{3}$ 이므로 $a+b=\frac{4}{3}$ 이다.

[다른 풀이]



반지름의 길이가 1인 원에 내접하는 작은 원의 반지름의 길이를 r라 하면 $1-r=2r$이므로 $r=\frac{1}{3}$ 이다. S_1은 한 변의 길이가 $\frac{2}{3}$인 정삼각형 6개의 넓이의 합에서 반지름의 길이가 $\frac{1}{3}$이고 중심각의 크기가 120°인 부채꼴 6개의 넓이의 합을 뺀 것과 같으므로

$$S_1=\frac{\sqrt{3}}{4}\times\left(\frac{2}{3}\right)^2\times 6-\pi\times\left(\frac{1}{3}\right)^2\times\frac{120^\circ}{360^\circ}\times 6=\frac{6\sqrt{3}-2\pi}{9}$$

이다.

$$S_2=S_1+\left(\frac{S_1}{9}\right)\times 6=S_1+\frac{2}{3}S_1$$

$$S_3=S_1+\left(\frac{S_1}{9}\right)\times 6+\left(\frac{S_1}{9}\right)^2\times 6^2=S_1+\frac{2}{3}S_1+\left(\frac{2}{3}\right)^2S_1$$

⋮

$$S_n=S_1+\left(\frac{S_1}{9}\right)\times 6+\left(\frac{S_1}{9}\right)^2\times 6^2+\cdots+\left(\frac{S_1}{9}\right)^{n-1}\times 6^{n-1}$$

$$=S_1+\frac{2}{3}S_1+\left(\frac{2}{3}\right)^2S_1+\cdots+\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}S_1$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}S_n=\frac{S_1}{1-\frac{2}{3}}$$

$$=\frac{\frac{6\sqrt{3}-2\pi}{9}}{\frac{1}{3}}$$

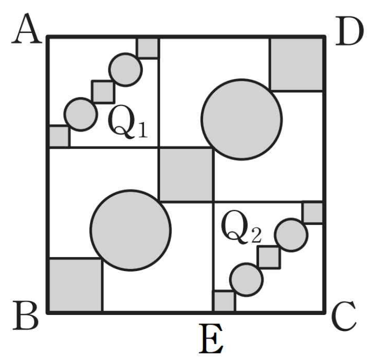
$$=\frac{6\sqrt{3}-2\pi}{3}$$

$$=2\sqrt{3}-\frac{2\pi}{3}$$

따라서 $a=2$, $b=-\frac{2}{3}$ 이므로 $a+b=\frac{4}{3}$ 이다.

78)[정답] ②

[해설]



$\overline{BE}$: $\overline{EC}=3$: 2이므로 닮음비는 $\frac{2}{5}$이다.

따라서 넓이의 비는 $\left(\frac{2}{5}\right)^2=\frac{4}{25}$이고 도형의 개수는 2배씩 늘어나므로 무한등비급수의 공비는

$$\frac{4}{25}\times 2=\frac{8}{25}$$

또한, 그림 R_1에서 $\overline{BD}=5\sqrt{2}$이므로

$$S_1=3\times1+2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\pi$$

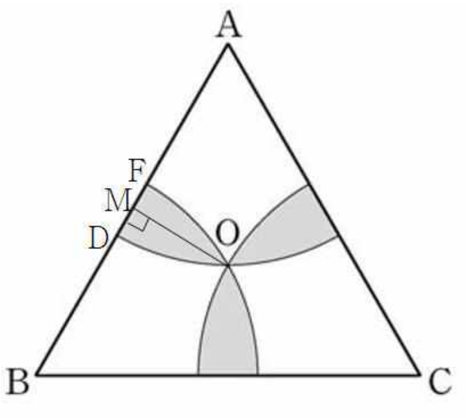
$=3+\pi$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}S_n=\frac{3+\pi}{1-\frac{8}{25}}$$

$=\frac{25}{17}(\pi+3)$

79) [정답] ③

[해설]



O가 정삼각형의 외심이므로 무게중심과 일치한다.

$\overline{DF}$의 중점을 M이라 하자.

$S_1=6\times$(부채꼴$AOD-$삼각형AOM)

부채꼴$AOD-$삼각형$AOM=a$ 라 하면

$\overline{AO}=2\sqrt{3}$, $\overline{AM}=3$

$a=\frac{1}{2}(2\sqrt{3})^2\times\frac{\pi}{6}-\frac{1}{2}\times3\times\sqrt{3}$

$=\pi-\frac{3}{2}\sqrt{3}$

$\therefore S_1=6(\pi-\frac{3}{2}\sqrt{3})$

$\overline{AF}=6-\overline{BF}=6-2\sqrt{3}$ 이므로

한 변의 길이가 6인 정삼각형ABC가

삼각형 AFI 로 축소되므로

길이의 비는 $\frac{6-2\sqrt{3}}{6}$,

넓이의 비는 $(\frac{6-2\sqrt{3}}{6})^2$,

개수는 3배로 증가하므로,

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{6(\pi-\frac{3}{2}\sqrt{3})}{1-3(\frac{6-2\sqrt{3}}{6})^2}=(2\pi-3\sqrt{3})(2\sqrt{3}+3)$$

80) [정답] ⑤

[해설]

선분 BC를 1 : 3으로 내분하므로 $\overline{BE}=1$

선분 DA를 1 : 3으로 내분하므로 $\overline{DF}=1$

따라서 그림 R_1에서 색칠된 평행사변형 BEDF의 넓이는 $1\times4=4$이다.

그림 R_2에서 삼각형 ECD 안의 정사각형의 한 변의 길이를 x라 하자.

삼각형 ECD에서 정사각형을 제외한 두 직각삼각형은 정사각형의 마주보는 두 변이 평행하므로 삼각형 ECD와 닮음이다. 이 중 좌측 직각삼각형의 밑변의 길이는 삼각형 ECD의 밑변과 높이의 비가 3 : 4이므로 $\frac{3}{4}x$가 된다.

따라서 $\overline{EC}=\frac{3}{4}x+x=\frac{7}{4}x=3$

그러므로 $x=\frac{12}{7}$

한 변의 길이가 $\frac{12}{7}$인 정사각형과 한 변의 길이가 4인 정사각형의 닮음비는 $\frac{12}{7}$: 4 = 3 : 7이므로 넓이의 비는 9 : 49이다.

그런데 두 개의 평행사변형이 그려지므로 그림 R_1에서 색칠된 도형의 넓이의 $\frac{9}{49}\times2=\frac{18}{49}$이 그림 R_2에서 새로 색칠된다. 따라서 그림 R_n에 색칠되어 있는 도형의 넓이는 첫째항이 4이고 공비가 $\frac{18}{49}$인 등비수열의 첫째항부터 제n항까지의 합이다.

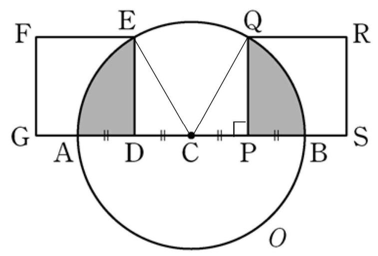
따라서 $\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{4}{1-\frac{18}{49}}=\frac{4\times49}{49-18}=\frac{196}{31}$

81) [정답] ③

[해설]

그림 R_1에서 아래 그림과 같이 두 점 C, Q 를 연결하여

직각삼각형 QCP 를 만든다.



직각삼각형 QCP 에서 $\overline{CQ}=2$, $\overline{CP}=1$ 이므로

$\overline{PQ}=\sqrt{\overline{CQ}^2-\overline{CP}^2}$

$=\sqrt{f2^2-1^2}$

$=\sqrt{3}$

이때

$\angle QCP=\frac{\pi}{3}$ 이다.

그러므로 도형 R_1에 색칠된 부분의 넓이는

2{(부채꼴QCB 의 넓이)−(△QCP 의 넓이)}

$=2\left\{\frac{1}{2}\times2^2\times\frac{\pi}{3}-\frac{1}{2}\times1\times\sqrt{3}\right\}$

$=\frac{4}{3}\pi-\sqrt{3}$ ...... ㉠

한편, 그림 R_2에서 새로 그려진 원의 반지름의 길이는

$\frac{1}{2}\overline{DE}=\frac{1}{2}\overline{PQ}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

그러므로 그림 R_1에 있는 원과 그림 R_2에 있는 원의 반지름

의 길이의 비는 $2:\frac{\sqrt{3}}{2}$ 즉, $1:\frac{\sqrt{3}}{4}$ 이다.

이때, 넓이의 비는 $1:\frac{3}{16}$ 이다.

한편, 그림 R_1의 원의 개수와 그림 R_2의 원의 개수의 비는

$2:4$ 즉, $1:2$ 이므로

공비는

$\frac{3}{16}\times2=\frac{3}{8}$

이다.

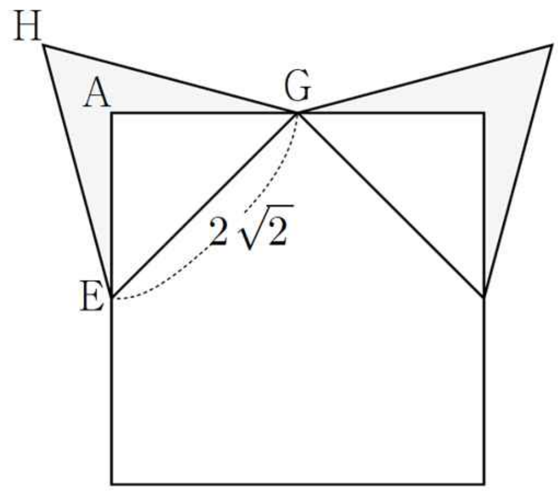
따라서 구하는 극한값은

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{\frac{4}{3}\pi-\sqrt{3}}{1-\frac{3}{8}}=\frac{32\pi-24\sqrt{3}}{15}$$

82) [정답] ②

[해설]

그림 R_1에서



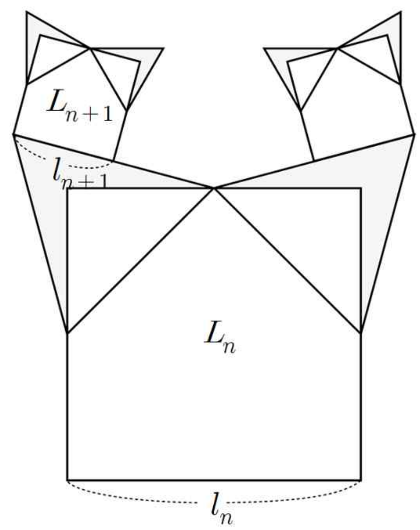
S_1은 정삼각형 EGH의 넓이에서 삼각형 EGA의 넓이를 뺀 값의 2배이므로

$S_1=2\times\left\{\frac{\sqrt{3}}{4}\times(2\sqrt{2})^2-\frac{1}{2}\times2\times2\right\}$

$=2\times(2\sqrt{3}-2)$

$=4(\sqrt{3}-1)$

다음은 그림 R_{n+1}의 일부이다.



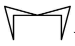
정사각형 L_n의 한 변의 길이를 l_n이라 하면

정사각형 L_{n+1}의 한 변의 길이

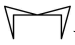
$l_{n+1}=\frac{l_n}{2}\times\sqrt{2}\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{2}}{4}l_n$

정사각형 L_n과 정사각형 L_{n+1}은 서로 닮음이고

닮음비는 $l_n : l_{n+1}=1:\frac{\sqrt{2}}{4}$

그러므로 그림 R_n과 R_{n+1}에서 새로 얻어진 모양의 도형도 서로 닮음이고

닮음비가 $1:\frac{\sqrt{2}}{4}$이므로 넓이의 비는 $1:\frac{1}{8}$이다.

또 새로 얻어지는 모양의 도형의 개수가 2배씩 늘어나므로

S_n은 첫째항이 $4(\sqrt{3}-1)$이고 공비가 $\frac{1}{8}\times2=\frac{1}{4}$인 등비수열의 첫째항부터 제$n$항까지의 합이다.

$$\therefore \lim_{n\to\infty}S_n=\frac{4(\sqrt{3}-1)}{1-\frac{1}{4}}=\frac{16}{3}(\sqrt{3}-1)$$

83) [정답] ④

[해설]

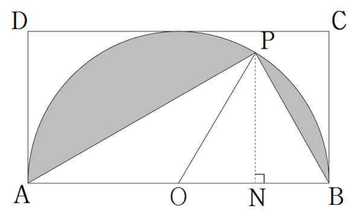


그림 R_1에서 반원의 중심을 O라 하면 $\overline{OP}=2$, $\overline{ON}=1$이므로 $\overline{NP}=\sqrt{3}$이다.
따라서 R_1에서 색칠되어 있는 부분의 넓이 S_1은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}S_1&=(\text{반원 } O\text{의 넓이})-(\text{삼각형 ABP의 넓이})\\&=\frac{1}{2}\pi(2^2)-\frac{1}{2}\times4\times\sqrt{3}\\&=2(\pi-\sqrt{3})\end{aligned}$$

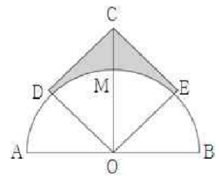
한편, 그림 R_n에서 그림 R_{n+1}을 얻을 때 새로 그려지는 사각형들은 그림 R_n에서 새로 그린 사각형보다 넓이는 $\left(\frac{1}{2}\right)^2$배로 줄어들고, 개수는 2배가 되므로 수열 $\{S_n\}$의 공비 $r=\left(\frac{1}{2}\right)^2\times2=\frac{1}{2}$이다.
그러므로

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{S_1}{1-r}=\frac{2(\pi-\sqrt{3})}{1-\frac{1}{2}}=4(\pi-\sqrt{3})$$

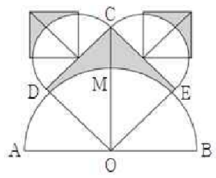
이다.

84) [정답] ③

[해설]



R_1



R_2

$\overline{OC}=3$이므로 $\overline{OE}=\frac{3}{\sqrt{2}}$, 즉 정사각형 OEDC의 넓이는 $\frac{9}{2}$이고, 사분원의 넓이는 π이므로, $S_1=\frac{9}{2}-\pi$이다.

그리고 두번째 축소된 모양은 지름의 길이가 4에서 $\frac{3}{\sqrt{2}}$인 반원이므로 줄어든 닮음비는 $\frac{3}{4\sqrt{2}}$, 넓이의 비는 닮음비의 제곱이고, 2개 생긴다.

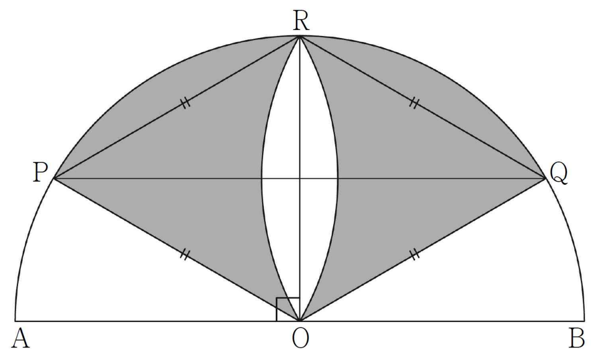
따라서 공비는 $2\times\left(\frac{3}{4\sqrt{2}}\right)^2=\frac{9}{16}$.

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{\frac{9}{2}-\pi}{1-\frac{9}{16}}=\frac{72-16\pi}{7}$$

85) [정답] ④

[해설]

다음은 그림 R_1이다.



호 AB 위에 $\angle ROA=90^\circ$인 점을 R라 하자.

점 O를 중심으로 하는 부채꼴 POR와 점 P를 중심으로 하는 부채꼴 RPO는 합동이다.

부채꼴 POR에서 정삼각형 RPO를 제외한 도형과 부채꼴 RPO에서 정삼각형 RPO를 제외한 도형의 넓이가 같으므로 그림 R_1에서 색칠된  모양의 도형의 넓이는 정삼각형 RPO의 넓이의 2배와 같다.

$\angle ROP=60^\circ$이므로

$S_1 = 2\times\left(\frac{1}{2}\times 2\times\sqrt{3}\right)=2\sqrt{3}$

다음은 그림 R_{n+1}의 일부이다. $(n\geq 1)$

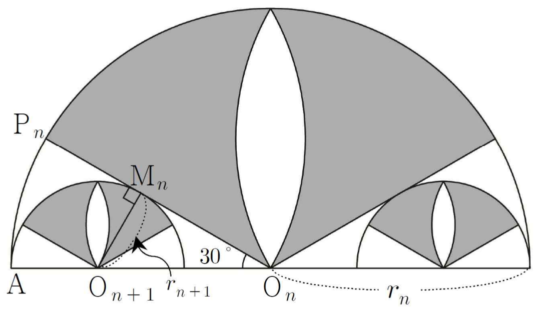


그림 R_n에서 새로 그려진 지름의 한 끝점을 점 A로 하는 반원의 중심을 O_n, 반지름의 길이를 r_n,

$\angle \mathrm{P}_n\mathrm{O}_n\mathrm{A}=30°$인 점을 P_n이라 하자. (단, $\mathrm{O}=\mathrm{O}_1$, $\mathrm{P}=\mathrm{P}_1$)

그림 R_{n+1}에서 새로 그려진 지름의 양 끝점은 선분 AO_n 위에 있고 선분 $\mathrm{P}_n\mathrm{O}_n$에 접하도록 그린 가장 큰 반원의 중심을 O_{n+1}, 반지름의 길이를 r_{n+1}, 점 O_{n+1}에서 선분 $\mathrm{P}_n\mathrm{O}_n$에 내린 수선의 발을 M_n이라 하면

$\frac{\overline{\mathrm{O}_{n+1}\mathrm{M}_n}}{\overline{\mathrm{O}_{n+1}\mathrm{O}_n}}=\frac{r_{n+1}}{r_n-r_{n+1}}=\frac{1}{2}$, $r_{n+1}=\frac{1}{3}r_n$

그림 R_n에서 새로 그려진 모양의 도형 한 개의 넓이를 a_n이라 하면 $a_{n+1}=\frac{1}{9}a_n$이다.

그림 R_{n+1}에서 새로 그려진 모양의 도형의 개수는 그림 R_n에서 새로 그려진 모양의 도형의 개수의 2배이다.

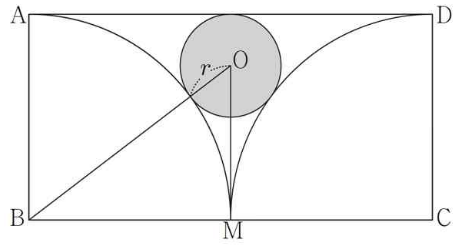
그러므로 S_n은 첫째항이 $2\sqrt{3}$이고 공비가 $\frac{2}{9}$인 등비수열의 첫째항부터 제n항까지의 합이다.

따라서 $\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{2\sqrt{3}}{1-\frac{2}{9}}=\frac{2\sqrt{3}}{\frac{7}{9}}=\frac{18\sqrt{3}}{7}$

86) [정답] ②

[해설]

다음은 그림 R_1이다.



두 부채꼴의 호 MA, 호 DM과 선분 AD에 모두 접하는 원의

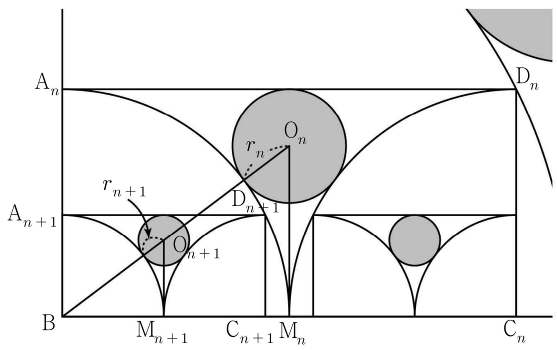
중심을 O, 반지름의 길이를 r라 하자.

$\overline{\mathrm{BO}}^2=\overline{\mathrm{BM}}^2+\overline{\mathrm{OM}}^2$이므로

$(1+r)^2=1^2+(1-r)^2$

$r=\frac{1}{4}$, $S_1=\left(\frac{1}{4}\right)^2\pi=\frac{\pi}{16}$

다음은 그림 R_{n+1}의 일부이다. $(n\geq 1)$



r_{n+1}그림 R_n에서 새로 그려진 각 부채꼴에 내접하는 직사각형 중

한 꼭짓점을 B로 하는 직사각형을 $\mathrm{A}_nBC_nD_n$이라 하고,

직사각형 $\mathrm{A}_nBC_nD_n$ 내부의 두 부채꼴의 호와 선분 A_nD_n에 모두

접하는 원의 중심을 O_n, 반지름의 길이를 r_n,

선분 BC_n의 중점을 M_n이라 하자.

$\overline{\mathrm{A}_{n+1}B}=l$이라 하면

$\overline{\mathrm{A}_{n+1}B}:\overline{\mathrm{BC}_{n+1}}=1:2$이므로

$\overline{\mathrm{BC}_{n+1}}=2l$, $\overline{\mathrm{BD}_{n+1}}=\sqrt{5}l$

또한, $\overline{\mathrm{BD}_{n+1}}=\overline{\mathrm{BM}_n}=\sqrt{5}l$이고

삼각형 $\mathrm{O}_{n+1}BM_{n+1}$과 삼각형 O_nBM_n은

닮음이므로 $\overline{\mathrm{BM}_{n+1}}:\overline{\mathrm{BM}_n}=\overline{\mathrm{BO}_{n+1}}:\overline{\mathrm{BO}_n}$

$l:\sqrt{5}l=(l+r_{n+1}):(\sqrt{5}l+r_n)$

$r_{n+1}=\frac{1}{\sqrt{5}}r_n$

그림 R_n에서 새로 그려진 원 한 개의 넓이를

a_n 이라 하면 $a_{n+1} = \frac{1}{5}a_n$

그림 R_{n+1}에서 새로 그려진 원의 개수는

그림 R_n에서 새로 그려진 원의 개수의 2배이므로

S_n은 첫째항이 $\frac{\pi}{16}$ 이고 공비가 $\frac{2}{5}$ 인 등비수열의

첫째항부터

제n항까지의 합이다.

따라서 $\lim_{n\to\infty} S_n = \dfrac{\frac{\pi}{16}}{1-\frac{2}{5}} = \frac{5}{48}\pi$

87) [정답] ①

[해설]

R_1에서 $\overline{\mathrm{OC}} = \overline{\mathrm{OD}} = 1$이므로 $\angle\mathrm{COD} = \angle\mathrm{DOF} = \frac{\pi}{3}$이다.

따라서 $\angle\mathrm{COI} = \angle\mathrm{DOH} = \frac{\pi}{6}$이고 $S_1 = 1 - \frac{1}{\sqrt{3}}$이다.

R_2에서 사분의 일 원은 모두 닮음이고 R_1에서 새로 그려진

두개의 사분의 일원은 반지름의 길이가 $\overline{\mathrm{CI}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$이 된다.

따라서 큰 사분의 일원과 작은 사분의 일원의 길이의 비는

$2 : \frac{1}{\sqrt{3}}$, 즉 $\frac{1}{2\sqrt{3}}$배가 되었다. 길이의 비가 $\frac{1}{2\sqrt{3}}$배이므로

넓이의 비는 $\left(\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{1}{12}$이다. 또한 개수는 2개가

되었으므로 S_2는 다음과 같이 구할 수 있다.

$S_2 = S_1 + \frac{1}{6}S_1$

마찬가지로 $S_2 = S_1 + \frac{1}{6}S_1 + \left(\frac{1}{6}\right)^2 S_1$이므로

$S_n = S_1\left\{1 + \left(\frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{6}\right)^2 + \left(\frac{1}{6}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{1}{6}\right)^n\right\}$이다.

따라서 $\lim_{n\to\infty} S_n = \dfrac{S_1}{1-\frac{1}{6}} = \dfrac{6S_1}{5} = \dfrac{2(3-\sqrt{3})}{5}$