제 2 교시

수학 영역

5지선다형

1. $\left(\dfrac{2^{\sqrt{3}}}{2}\right)^{\sqrt{3}+1}$ 의 값은? [2점]

① $\dfrac{1}{16}$ ② $\dfrac{1}{4}$ ③ 1 ④ 4 ⑤ 16

$\left(2^{\sqrt{3}-1}\right)^{\sqrt{3}+1} = 2^{3-1} = 4$

2. 함수 $f(x)=2x^2+5$ 에 대하여 $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$ 의 값은? [2점]

① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

$f'(x)=4x$

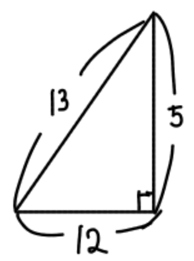
$f'(2)=8$

$f'(2)=?$

3. $\sin(\pi-\theta)=\dfrac{5}{13}$ 이고 $\cos\theta<0$ 일 때, $\tan\theta$ 의 값은? [3점]

① $-\dfrac{12}{13}$ ② $-\dfrac{5}{12}$ ③ 0 ④ $\dfrac{5}{12}$ ⑤ $\dfrac{12}{13}$

$\boxed{\sin\theta=\frac{5}{13} \quad \cos\theta<0}$ ⇒ 제 2사분면 $\tan\theta<0$



$\Rightarrow \tan\theta = -\dfrac{5}{12}$

4. 함수

$$f(x)=\begin{cases} -2x+a & (x\le a) \\ ax-6 & (x>a) \end{cases}$$

가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 모든 상수 a의 값의 합은? [3점]

① -1 ② -2 ③ -3 ④ -4 ⑤ -5

$-2a+a=a^2-6$

$a^2+a-6=0$ 근과 계수의 관계 → -1

5. 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_1 = 2a_5, \quad a_8 + a_{12} = -6$$

일 때, a_2의 값은? [3점]

① 17 ② 19 ③ 21 ④ 23 ⑤ 25

① $a_1 = 2a_5$
$a = 2a + 8d$
$\therefore a = -8d$

② $a_8 + a_{12} = 2a + 18d$
$= 2d$
$= -6$
$\therefore d = -3$

$a_2 = a + d$
$= -7d$
$= 21$

6. 함수 $f(x) = x^3 - 3x^2 + k$의 극댓값이 9일 때, 함수 $f(x)$의 극솟값은? (단, k는 상수이다.) [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$f'(x) = 3x^2 - 6x$
$= 3x(x-2)$ $\Rightarrow$ $x=0$ 극대, $x=2$ 극소

$f(0) = k = 9$

$f(2) = 8 - 12 + 9 = 5$

7. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 하자. $S_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$일 때, $\displaystyle\sum_{k=1}^{10}(S_k - a_k)$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{3}{5}$ ③ $\frac{7}{10}$ ④ $\frac{4}{5}$ ⑤ $\frac{9}{10}$

$S_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ $\rightarrow$ $\displaystyle\sum_{k=1}^{10} S_k = \sum_{k=1}^{10}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{10}{11}$

$\displaystyle\sum_{k=1}^{10} a_k = S_{10} = \frac{1}{110}$

$\therefore \displaystyle\sum_{k=1}^{10}(S_k - a_k) = \frac{10}{11} - \frac{1}{110} = \frac{9}{10}$

8. 곡선 $y=x^3-4x+5$ 위의 점 $(1,2)$에서의 접선이 곡선 $y=x^4+3x+a$에 접할 때, 상수 a의 값은? [3점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

$y' = 3x^2-4$ → 접선 $y=-(x-1)+2$

$y' = 4x^3+3=-1$ → $x=-1$ 대입 $(-1, 4)$ 대입

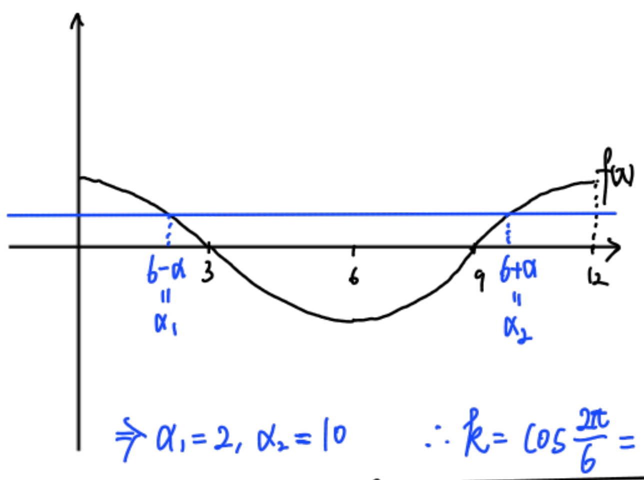
$4 = 1-3+a$ → $\therefore a=6$

9. 닫힌구간 $[0, 12]$ 에서 정의된 두 함수

$$f(x)=\cos\frac{\pi x}{6}, \quad g(x)=-3\cos\frac{\pi x}{6}-1$$

이 있다. 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$가 만나는 두 점의 x좌표를 α_1, α_2라 할 때, $|\alpha_1-\alpha_2|=8$이다. 곡선 $y=g(x)$와 직선 $y=k$가 만나는 두 점의 x좌표를 β_1, β_2라 할 때, $|\beta_1-\beta_2|$의 값은? (단, k는 $-1<k<1$인 상수이다.) [4점]

① 3 ② $\frac{7}{2}$ ③ 4 ④ $\frac{9}{2}$ ⑤ 5



$\Rightarrow \alpha_1=2, \alpha_2=10$ $\therefore k=\cos\frac{2\pi}{6}=\frac{1}{2}$

$g(\beta)=\frac{1}{2}=-3\cos\frac{\pi x}{6}-1$

$\Rightarrow \cos\frac{\pi x}{6}=-\frac{1}{2}$

$\frac{\pi x}{6}=\frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi$ $\Rightarrow \beta_1=4, \beta_2=8$

$\therefore |\beta_1-\beta_2|=4$

10. 수직선 위의 점 A(6)과 시각 $t=0$일 때 원점을 출발하여 이 수직선 위를 움직이는 점 P가 있다. 시각 $t(t\geq 0)$에서의 점 P의 속도 $v(t)$를

$$v(t)=3t^2+at \quad (a>0)$$

이라 하자. 시각 $t=2$에서 점 P와 점 A 사이의 거리가 10일 때, 상수 a의 값은? [4점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$x(t)=t^3+\frac{1}{2}at^2$

$x(2)=8+2a$

$8+2a-6=10$

$\therefore a=4$

11. 함수 $f(x) = -(x-2)^2 + k$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 자연수 n의 개수가 2일 때, 상수 k의 값은? [4점]

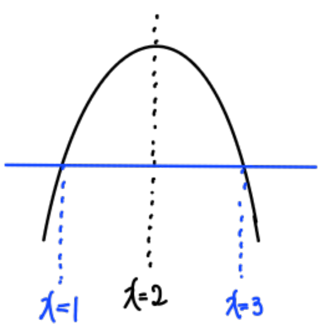
$\sqrt{3}^{f(n)}$의 네제곱근 중 실수인 것을 모두 곱한 값이 -9이다.

① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

$x^4 = \sqrt{3}^{f(n)} \Rightarrow x = \pm 3^{\frac{f(n)}{8}}$

곱: $-3^{\frac{f(n)}{4}} = -3^2$

$\therefore f(n) = 8$



$8 \Rightarrow (1,8)$ 대입

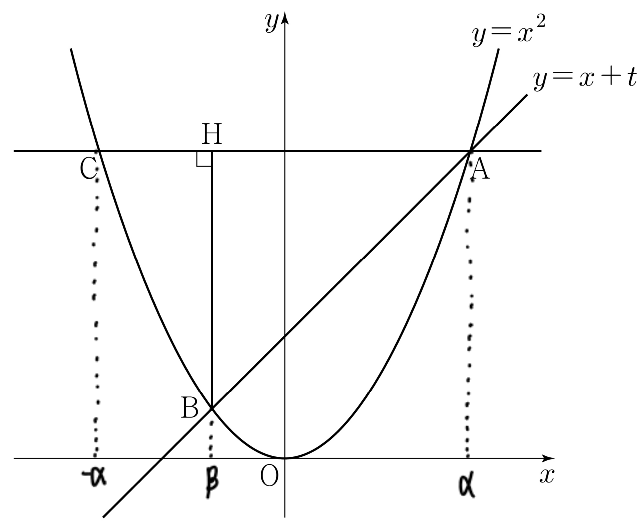
$-1+k=8$

$\therefore k=9$

12. 실수 $t\,(t>0)$에 대하여 직선 $y=x+t$와 곡선 $y=x^2$이 만나는 두 점을 A, B라 하자. 점 A를 지나고 x축에 평행한 직선이 곡선 $y=x^2$과 만나는 점 중 A가 아닌 점을 C, 점 B에서 선분 AC에 내린 수선의 발을 H라 하자.

$\lim_{t\to0+} \frac{\overline{AH}-\overline{CH}}{t}$의 값은? (단, 점 A의 x좌표는 양수이다.) [4점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5



$\overline{AH} - \overline{CH} = (\alpha-\beta) - (\beta+\alpha)$

$= -2\beta$

$x^2 - x - t = 0$

$\beta = \frac{1-\sqrt{1+4t}}{2}$

$\Rightarrow \lim_{t\to0+} \frac{\overline{AH}-\overline{CH}}{t} = \lim_{t\to0+} \frac{-2\beta}{t}$

$= \lim_{t\to0+} \frac{\sqrt{1+4t}-1}{t}$

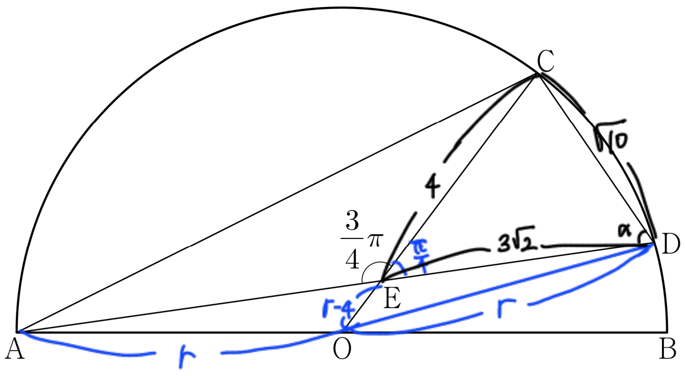
$= \lim_{t\to0+} \frac{4t}{t(\sqrt{1+4t}+1)}$

$= 2$

13. 그림과 같이 선분 AB를 지름으로 하는 반원의 호 AB 위에 두 점 C, D가 있다. 선분 AB의 중점 O에 대하여 두 선분 AD, CO가 점 E에서 만나고,

$$\overline{CE}=4,\quad \overline{ED}=3\sqrt{2},\quad \angle CEA=\frac{3}{4}\pi$$

이다. $\overline{AC}\times\overline{CD}$의 값은? [4점]



① $6\sqrt{10}$ ② $10\sqrt{5}$ ③ $16\sqrt{2}$
④ $12\sqrt{5}$ ⑤ $20\sqrt{2}$

$\overline{CD}^2 = 16+18-2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 4\cdot 3\sqrt{2}$

$= 10$

$\cos\alpha = \frac{18+10-16}{2\cdot 3\sqrt{2}\cdot\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{5}}{5} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

$\triangle OED$ 에서 $r^2 = (r-4)^2+(3\sqrt{2})^2+2\cdot(r-4)(3\sqrt{2})\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$\therefore r=5$

$\triangle ACD$ 에서 Sine Law

$\Rightarrow \overline{AC} = 2\cdot 5\cdot\frac{2\sqrt{5}}{5} = 4\sqrt{5}$

$\therefore \overline{AC}\times\overline{CD} = 20\sqrt{2}$

14. 최고차항의 계수가 1이고 $f(0)=0$, $f(1)=0$인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(t)$를

$$g(t)=\int_t^{t+1} f(x)\,dx-\int_0^1 |f(x)|\,dx$$

라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $g(0)=0$이면 $g(-1)<0$이다.

ㄴ. $g(-1)>0$이면 $f(k)=0$을 만족시키는 $k<-1$인 실수 k가 존재한다.

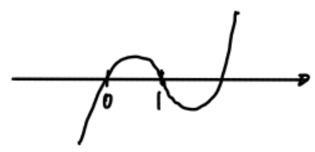
ㄷ. $g(-1)>1$이면 $g(0)<-1$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

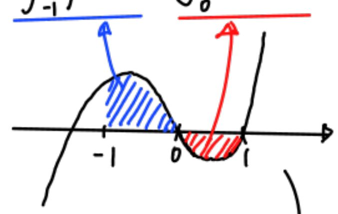
ㄱ $g(0)=0 \rightarrow 0<x<1$ 에서 $f(x)>0$

$g(-1) = \int_{-1}^{0} f(x)dx - \int_0^1 f(x)dx$

$\ominus \quad - \quad \oplus \quad = \ominus$



ㄴ $\int_{-1}^{0} f(x)dx > \int_0^1 |f(x)|dx$



ㄷ $f(x) = x(x-1)(x-a)$

$g(-1) = \int_{-1}^{0} f(x)dx + \int_0^1 f(x)dx = \left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}(a+1)x^3+\frac{1}{2}ax^2\right]_{-1}^{1}$

$= -\frac{2(a+1)}{3} > 1$

$\Rightarrow a < -\frac{5}{2}$

$g(0) = 2\cdot\int_0^1 f(x)dx = 2\cdot\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}(a+1)x^3+\frac{1}{2}ax^2\right]_0^1$

$= \frac{1}{3}a-\frac{1}{6} < -1$

15. 수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 모든 자연수 k에 대하여 $a_{4k} = r^k$이다.
> (단, r는 $0 < |r| < 1$인 상수이다.)
>
> (나) $a_1 < 0$이고, 모든 자연수 n에 대하여
> $$a_{n+1} = \begin{cases} a_n + 3 & (|a_n| < 5) \\ -\frac{1}{2}a_n & (|a_n| \geq 5) \end{cases}$$
> 이다.

$|a_m| \geq 5$를 만족시키는 100 이하의 자연수 m의 개수를 p라 할 때, $p + a_1$의 값은? [4점]

① 8 ② 10 ③ 12 ④ 14 ⑤ 16

a_4	a_5	a_6	a_7	a_8
r	$r+3$	$r+6$	$-\frac{1}{2}(r+6)$	$-\frac{1}{2}r$

$-\frac{1}{2}r = r^2$

$\therefore r = -\frac{1}{2}$

a_4	a_3	a_2	a_1
$-\frac{1}{2}$	$-\frac{7}{2}$	7	-14

$|a_m| \geq 5$

$m = 1, 2, 6, \cdots, 98 \leadsto p = 26$

$\therefore p + a_1 = 26 - 14 = 12$

단답형

16. 방정식 $\log_3(x-4) = \log_9(x+2)$를 만족시키는 실수 x의 값을 구하시오. [3점]

7

$x-4>0,\ x+2>0 \rightarrow -2<x<4$

$\log_9(x^2-8x+16) = \log_9(x+2)$

$x^2 - 9x + 14 = 0$

$(x-2)(x-7) = 0$

$\therefore x = 7$

17. 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x) = 6x^2 - 4x + 3$이고 $f(1) = 5$일 때, $f(2)$의 값을 구하시오. [3점]

16

$f(x) = 2x^3 - 2x^2 + 3x + C$

$f(1) = 2 - 2 + 3 + C = 5 \Rightarrow C = 2$

$f(2) = 16 - 8 + 6 + 2 = 16$

18. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{k=1}^{5} a_k = 10$일 때,

$$\sum_{k=1}^{5} c a_k = 65 + \sum_{k=1}^{5} c$$

를 만족시키는 상수 c의 값을 구하시오. [3점]

13

$10c = 65 + 5c$

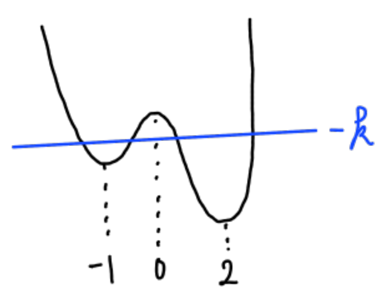
$\therefore c = 13$

19. 방정식 $3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + k = 0$이 서로 다른 4개의 실근을 갖도록 하는 자연수 k의 개수를 구하시오. [3점]

4

$f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 = -k$

$f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 24x = 12(x-2)(x+1)x$



$f(-1) = 3 + 4 - 12 = -5$

$f(0) = 0$

$\Rightarrow -5 < -k < 0$

$k = 1, 2, 3, 4$

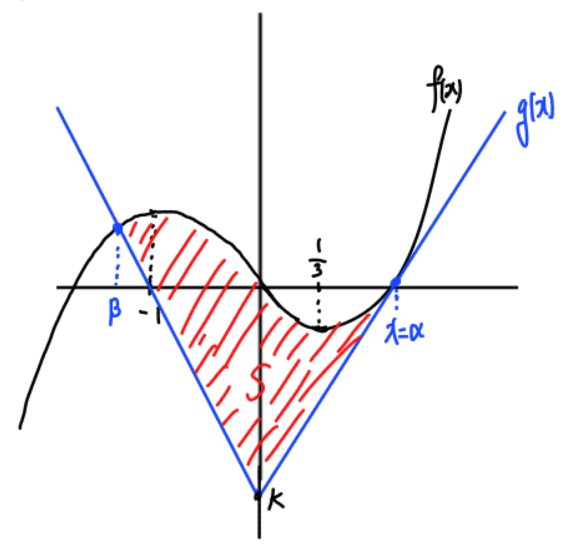
20. 상수 $k\,(k<0)$에 대하여 두 함수

$$f(x) = x^3 + x^2 - x, \quad g(x) = 4|x| + k$$

80

의 그래프가 만나는 점의 개수가 2일 때, 두 함수의 그래프로 둘러싸인 부분의 넓이를 S라 하자. $30 \times S$의 값을 구하시오. [4점]

$f'(x) = 3x^2 + 2x - 1 = (3x-1)(x+1)$



$\rightarrow f'(\alpha) = 4 \iff 3\alpha^2 + 2\alpha - 1 = 4 \quad \therefore \alpha = 1$

$\Rightarrow f(1) = g(1) \iff 1 = 4 + k \quad \therefore k = -3$

$\Rightarrow f(\beta) = g(\beta) \iff \beta^3 + \beta^2 - \beta = -4\beta - 3 \quad \therefore \beta = -1$

$$S = \int_{-1}^{0} (x^3 + x^2 + 3x + 3)\,dx + \int_{0}^{1} (x^3 + x^2 - 5x + 3)\,dx$$

$$= \frac{8}{3}$$

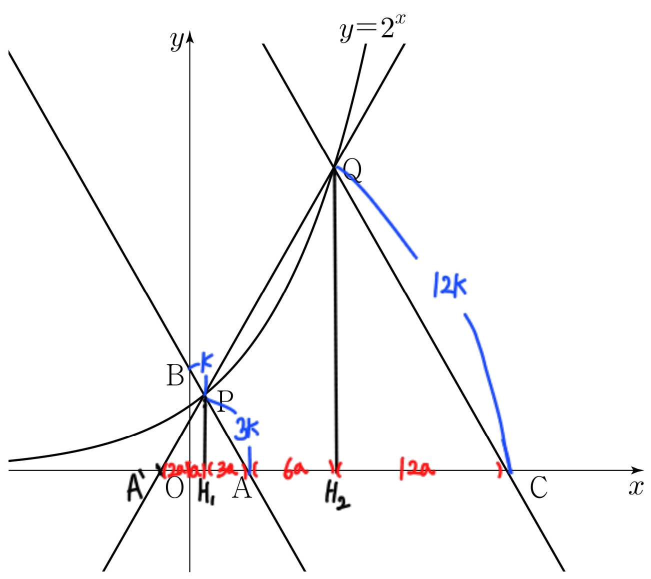
$\therefore 30 \times S = 80$

21. 그림과 같이 곡선 $y=2^x$ 위에 두 점 $\mathrm{P}(a,\ 2^a)$, $\mathrm{Q}(b,\ 2^b)$이 있다. 직선 PQ의 기울기를 m이라 할 때, 점 P를 지나며 기울기가 $-m$인 직선이 x축, y축과 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 점 Q를 지나며 기울기가 $-m$인 직선이 x축과 만나는 점을 C라 하자.

220

$$\overline{\mathrm{AB}}=4\overline{\mathrm{PB}},\quad \overline{\mathrm{CQ}}=3\overline{\mathrm{AB}}$$

일 때, $90\times(a+b)$의 값을 구하시오. (단, $0<a<b$) [4점]



$\triangle APH_1 \sim \triangle CQH_2$ 1:4 닮음.

$\overline{PH_1} : \overline{QH_2} = 1:4 \Leftrightarrow 2^a \cdot 4 = 2^b$ $\therefore a+2=b$

$\overline{OH_1} = a$, $\overline{AH_1} = 3a \Rightarrow \overline{CH_1} = 12a$

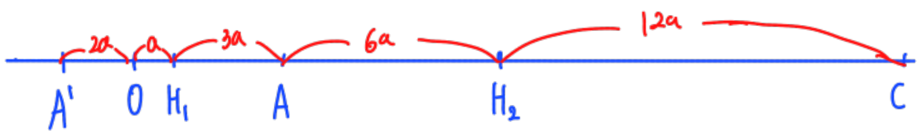
$\triangle APH_1 \equiv \triangle A'PH_1$, $\triangle CQH_2 \equiv \triangle A'QH_2$ 이므로

$\overline{A'H_1} = \overline{AH_1} = 3a$, $\overline{A'H_2} = \overline{CH_2} = 12a$

$\overline{H_1H_2} = b-a = 2$

$= \overline{A'H_2} - \overline{A'H_1} = 9a$ $\therefore a = \frac{2}{9},\ b = \frac{20}{9}$

$90\times(a+b) = 220$

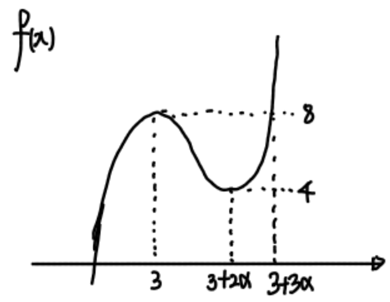


22. 최고차항의 계수가 1이고 $x=3$에서 극댓값 8을 갖는 삼차함수 $f(x)$가 있다. 실수 t에 대하여 함수 $g(x)$를

58

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x\geq t) \\ -f(x)+2f(t) & (x<t) \end{cases}$$

라 할 때, 방정식 $g(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수를 $h(t)$라 하자. 함수 $h(t)$가 $t=a$에서 불연속인 a의 값이 두 개일 때, $f(8)$의 값을 구하시오. [4점]



$\Rightarrow f(x) = (x-3)^2(x-(3+3\alpha))+8$

$f(3+2\alpha) = (2\alpha)^2(-\alpha)+8 = 4$ $\therefore \alpha = 1$

$\Rightarrow f(x) = (x-3)^2(x-6)+8$

$\therefore f(8) = 25\cdot 2+8 = 58$

* 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

○ 이어서, **「선택과목(확률과 통계)」** 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(확률과 통계)

5지선다형

23. 다항식 $(x^2+2)^6$의 전개식에서 x^4의 계수는? [2점]

① 240 ② 270 ③ 300 ④ 330 ⑤ 360

${}_6C_2 \cdot (x^2)^2 (2)^4 = 240x^4$

24. 두 사건 A, B에 대하여

$$\mathrm{P}(A\cup B)=1,\quad \mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{4},\quad \mathrm{P}(A|B)=\mathrm{P}(B|A)$$

일 때, $\mathrm{P}(A)$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{9}{16}$ ③ $\frac{5}{8}$ ④ $\frac{11}{16}$ ⑤ $\frac{3}{4}$

$\frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} \Rightarrow P(A)=P(B)$

$P(A\cup B) = P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

$1 = 2P(A) - \frac{1}{4}$

$\therefore P(A) = \frac{5}{8}$

25. 어느 인스턴트 커피 제조 회사에서 생산하는 A 제품 1개의 중량은 평균이 9, 표준편차가 0.4인 정규분포를 따르고, B 제품 1개의 중량은 평균이 20, 표준편차가 1인 정규분포를 따른다고 한다. 이 회사에서 생산한 A 제품 중에서 임의로 선택한 1개의 중량이 8.9 이상 9.4 이하일 확률과 B 제품 중에서 임의로 선택한 1개의 중량이 19 이상 k 이하일 확률이 서로 같다. 상수 k의 값은? (단, 중량의 단위는 g이다.) [3점]

① 19.5 ② 19.75 ③ 20 ④ 20.25 ⑤ 20.5

X의 정규 분포 $N(9, (0.4)^2)$

Y의 정규 분포 $N(20, (1)^2)$

$P(8.9 \le X \le 9.4) = P(19 \le Y \le k)$

$P\left(\frac{8.9-9}{0.4} \le Z \le \frac{9.4-9}{0.4}\right) = P\left(\frac{19-20}{1} \le Z \le \frac{k-20}{1}\right)$

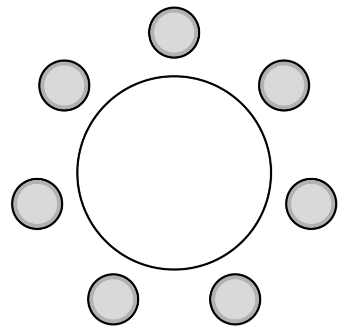
$P(-0.25 \le Z \le 1) = P(-1 \le Z \le k-20)$

$k-20 = 0.25$

$\therefore k = 20.25$

26. 세 학생 A, B, C를 포함한 7명의 학생이 원 모양의 탁자에 일정한 간격을 두고 임의로 모두 둘러앉을 때, A가 B 또는 C와 이웃하게 될 확률은? [3점]

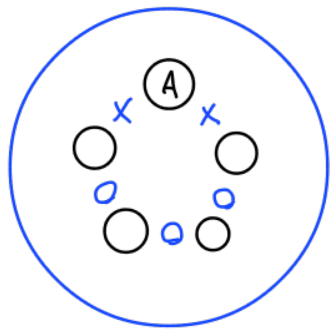
① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{3}{5}$ ③ $\frac{7}{10}$ ④ $\frac{4}{5}$ ⑤ $\frac{9}{10}$



여사건

① 전체 $6!$

② B,C 제외 5명 앉히기 $4!$



③ -i) B,C 이웃O 2×3

-ii) B,C 이웃X ${}_3P_2$

$\Rightarrow 1 - \frac{4!(6+6)}{6!} = \frac{3}{5}$

27. 이산확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	a	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{5}$	1

$\sigma(X)=\mathrm{E}(X)$일 때, $\mathrm{E}(X^2)+\mathrm{E}(X)$의 값은? (단, $a>1$) [3점]

① 29 ② 33 ③ 37 ④ 41 ⑤ 45

$$\left.\begin{array}{l} E(X)=\frac{1}{2}+\frac{2}{5}a \\ E(X^2)=\frac{1}{2}+\frac{2}{5}a^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2 \\ V(X)=\{E(X)\}^2 \end{array}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}+\frac{2}{5}a^2=2\times\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{5}a\right)^2 \quad \therefore a=10$$

$$E(X^2)+E(X)=45$$

28. 1부터 10까지의 자연수 중에서 임의로 서로 다른 3개의 수를 선택한다. 선택된 세 개의 수의 곱이 5의 배수이고 합은 3의 배수일 확률은? [4점]

① $\frac{3}{20}$ ② $\frac{1}{6}$ ③ $\frac{11}{60}$ ④ $\frac{1}{5}$ ⑤ $\frac{13}{60}$

전체 ${}_{10}C_3=120$

i) 5 선택

$3n+1$ $\{1,4,7,10\}$
$3n+2$ $\{2,8\}$
$3n$ $\{3,6,9\}$

$$\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix} \Rightarrow 13$$

$\Downarrow$ ${}_4C_1\times{}_3C_1$, $\Downarrow$ ${}_2C_2$

ii) 10 선택

$3n+1$ $\{1,4,7\}$
$3n+2$ $\{2,5,8\}$
$3n$ $\{3,6,9\}$

$$\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \Rightarrow 12$$

$\Downarrow$ ${}_3C_2$, $\Downarrow$ ${}_3C_1\times{}_3C_1$

iii) 5, 10 선택

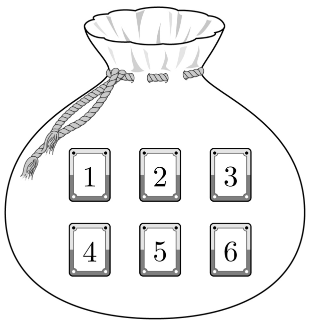
$\{3,6,9\}$ 중 1개 선택 ${}_3C_1$ $\Rightarrow 3$

$$\therefore \frac{13+12-3}{120}=\frac{11}{60}$$

단답형

29. 1부터 6까지의 자연수가 하나씩 적힌 6장의 카드가 들어 있는 주머니가 있다. 이 주머니에서 임의로 한 장의 카드를 꺼내어 카드에 적힌 수를 확인한 후 다시 넣는 시행을 한다. 이 시행을 4번 반복하여 확인한 네 개의 수의 평균을 $\overline{X}$라 할 때, $\mathrm{P}\left(\overline{X}=\frac{11}{4}\right)=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

175



$X_1+X_2+X_3+X_4=11$

$X_i=X_i'+1$ 이라 하면, $X_1'+X_2'+X_3'+X_4'=7$

이때 $(7,0,0,0)$, $(6,1,0,0)$ 제외

$\therefore\ {}_4\mathrm{H}_7-(4+12)=104$

$\frac{104}{4^4}=\frac{13}{162}$

$\therefore\ p+q=175$

30. 집합 $X=\{1,2,3,4,5\}$와 함수 $f:X\to X$에 대하여 함수 f의 치역을 A, 합성함수 $f\circ f$의 치역을 B라 할 때, 다음 조건을 만족시키는 함수 f의 개수를 구하시오. [4점]

260

(가) $n(A)\le 3$

(나) $n(A)=n(B)$

(다) 집합 X의 모든 원소 x에 대하여 $f(x)\ne x$이다.

i) $n(A)=2$

$\{A\}\Rightarrow {}_5\mathrm{C}_2$

$A=\{a,b\}$ 이면 $f(a)=b,\ f(b)=a$

$f(c), f(d), f(e)$ 정하기 $\Rightarrow {}_2\Pi_3$

$\Rightarrow 10\cdot 8=80$

ii) $n(A)=3$

$\{A\}\Rightarrow {}_5\mathrm{C}_3$

$A=\{a,b,c\}$이면

$f(a)$	$f(b)$	$f(c)$
b	c	a
c	a	b

$f(d), f(e)$ 정하기 $\Rightarrow {}_3\Pi_2$

$\Rightarrow 10\cdot 2\cdot 9=180$

$\therefore\ 80+180=260$

＊ 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

○ 이어서, **「선택과목(미적분)」** 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(미적분)

5지선다형

23. $\lim_{x\to 0}\frac{4^x-2^x}{x}$ 의 값은? [2점]

① $\ln 2$ ② 1 ③ $2\ln 2$ ④ 2 ⑤ $3\ln 2$

$\lim_{x\to 0}\frac{(4^x-1)-(2^x-1)}{x}=\ln 4-\ln 2$

$=\ln 2$

24. $\int_0^{\pi} x\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)dx$ 의 값은? [3점]

① $\frac{\pi}{2}$ ② π ③ $\frac{3\pi}{2}$ ④ 2π ⑤ $\frac{5\pi}{2}$

$\int_0^{\pi} x\sin x\,dx=\left[-x\cos x\right]_0^{\pi}+\int_0^{\pi}\cos x\,dx$

$=\left[-x\cos x+\sin x\right]_0^{\pi}$

$=\pi$

25. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n+2}{2}=6$일 때,

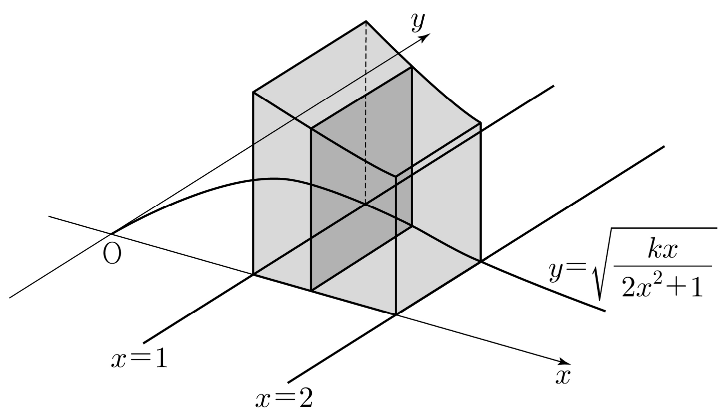
$\lim_{n\to\infty}\frac{na_n+1}{a_n+2n}$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$\lim_{n\to\infty} a_n = 10$

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n+\frac{1}{n}}{\frac{a_n}{n}+2} = \frac{10}{2} = 5$

26. 그림과 같이 양수 k에 대하여 곡선 $y=\sqrt{\frac{kx}{2x^2+1}}$ 와 x축 및 두 직선 $x=1$, $x=2$로 둘러싸인 부분을 밑면으로 하고 x축에 수직인 평면으로 자른 단면이 모두 정사각형인 입체도형의 부피가 $2\ln 3$일 때, k의 값은? [3점]



① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

$\int_1^2 \frac{kx}{2x^2+1}dx = \frac{k}{4}\int_1^2 \frac{4x}{2x^2+1}dx$

$= \frac{k}{4}\left[\ln|2x^2+1|\right]_1^2$

$= \frac{k}{4}(\ln 3) = 2\ln 3$

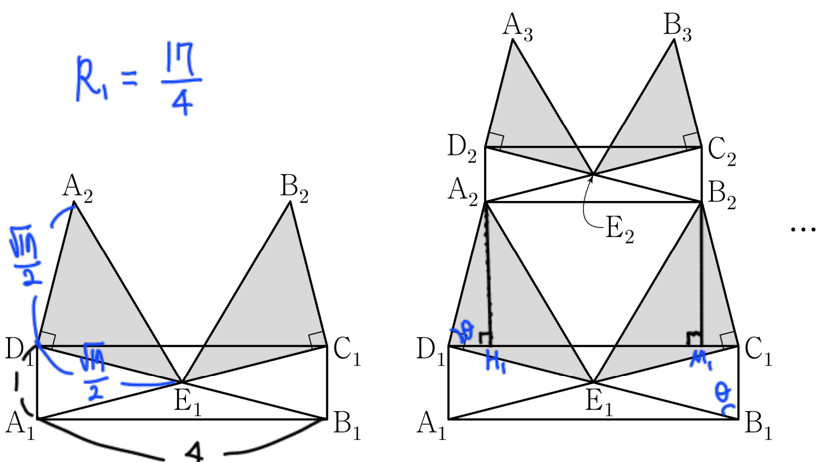
$\therefore k=8$

27. 그림과 같이 $\overline{A_1B_1}=4$, $\overline{A_1D_1}=1$인 직사각형 $A_1B_1C_1D_1$에서 두 대각선의 교점을 E_1이라 하자. $\overline{A_2D_1}=\overline{D_1E_1}$, $\angle A_2D_1E_1=\frac{\pi}{2}$이고 선분 D_1C_1과 선분 A_2E_1이 만나도록 점 A_2를 잡고, $\overline{B_2C_1}=\overline{C_1E_1}$, $\angle B_2C_1E_1=\frac{\pi}{2}$이고 선분 D_1C_1과 선분 B_2E_1이 만나도록 점 B_2를 잡는다. 두 삼각형 $A_2D_1E_1$, $B_2C_1E_1$을 그린 후 ⋈ 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

그림 R_1에서 $\overline{A_2B_2}:\overline{A_2D_2}=4:1$이고 선분 D_2C_2가 두 선분 A_2E_1, B_2E_1과 만나지 않도록 직사각형 $A_2B_2C_2D_2$를 그린다. 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 세 점 E_2, A_3, B_3을 잡고 두 삼각형 $A_3D_2E_2$, $B_3C_2E_2$를 그린 후 ⋈ 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [3점]

$R_1 = \frac{17}{4}$



R_1 R_2 …

① $\frac{68}{5}$ ② $\frac{34}{3}$ ③ $\frac{68}{7}$ ④ $\frac{17}{2}$ ⑤ $\frac{68}{9}$

$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{17}} = \frac{\overline{DH_1}}{\frac{\sqrt{17}}{2}} \Rightarrow \overline{DH_1}=\frac{1}{2}$, $\overline{C_1M_1}=\frac{1}{2}$

$\Rightarrow \overline{A_2B_2}=3$

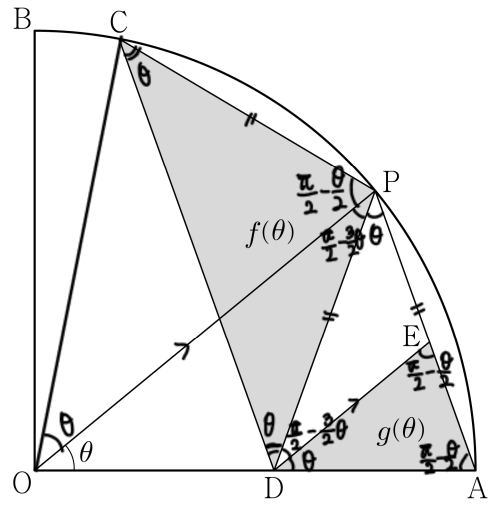
길이 비 $\overline{A_1B_1}:\overline{A_2B_2}=4:3$

넓이 비 $16:9$

$\therefore \frac{\frac{17}{4}}{1-\frac{9}{16}} = \frac{68}{7}$

28. 그림과 같이 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$인 부채꼴 OAB가 있다. 호 AB 위의 점 P에 대하여 $\overline{PA}=\overline{PC}=\overline{PD}$가 되도록 호 PB 위에 점 C와 선분 OA 위에 점 D를 잡는다. 점 D를 지나고 선분 OP와 평행한 직선이 선분 PA와 만나는 점을 E라 하자. $\angle POA=\theta$일 때, 삼각형 CDP의 넓이를 $f(\theta)$, 삼각형 EDA의 넓이를 $g(\theta)$라 하자.

$\lim_{\theta\to 0+}\frac{g(\theta)}{\theta^2\times f(\theta)}$의 값은? (단, $0<\theta<\frac{\pi}{4}$) [4점]



① $\frac{1}{8}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{3}{8}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{5}{8}$

$\angle OPA = \angle OAP = \angle ADP = \angle OPC = \frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}$
$\angle ADE = \angle COP = \theta$
$\Rightarrow \angle ADE = \angle APD = \theta$, $\angle OPD = \angle PDE = \frac{\pi}{2}-\frac{3}{2}\theta$

• $\angle CPD = \pi - 2\theta \rightarrow \angle PCD = \angle PDC = \theta$

$\frac{1}{\sin(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2})} = \frac{\overline{CP}}{\sin\theta}$ $\therefore \overline{CP} = \frac{\sin\theta}{\cos(\frac{\theta}{2})} = \overline{AP}$

$f(\theta) = \frac{1}{2}\cdot\overline{CP}\cdot\overline{PD}\cdot\sin 2\theta = \frac{\sin^2\theta\cdot\sin 2\theta}{2\cdot\cos^2\frac{\theta}{2}}$

$\frac{\overline{DA}}{\sin\theta} = \frac{\overline{AP}}{\sin(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2})}$ $\therefore \overline{DA} = \frac{\sin\theta}{\cos^2(\frac{\theta}{2})}$

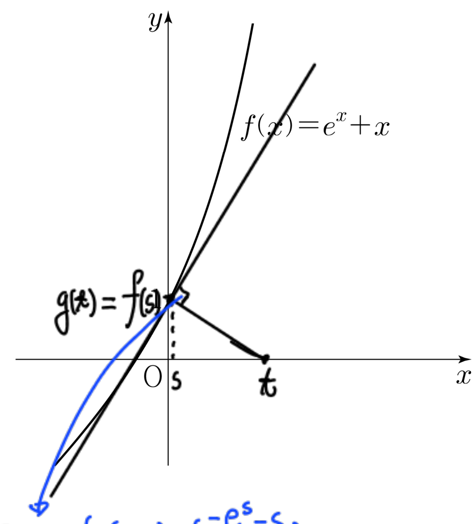
$g(\theta) = \frac{1}{2}\cdot\overline{DA}\cdot\overline{DE}\cdot\sin\theta = \frac{\sin^3\theta}{2\cdot\cos^4\frac{\theta}{2}}$

$\lim_{\theta\to 0+}\frac{\sin^3\theta}{\theta^2\cdot\sin^2\theta\cdot\sin 2\theta}\cdot\frac{2\cdot\cos^2\frac{\theta}{2}}{2\cdot\cos^4\frac{\theta}{2}} = \frac{1}{2}$

단답형

29. 함수 $f(x)=e^x+x$가 있다. 양수 t에 대하여 점 $(t,0)$과 점 $(x, f(x))$ 사이의 거리가 $x=s$에서 최소일 때, 실수 $f(s)$의 값을 $g(t)$라 하자. 함수 $g(t)$의 역함수를 $h(t)$라 할 때, $h'(1)$의 값을 구하시오. [4점]

3



수직 $\Rightarrow (e^s+s)\times\left(\frac{-e^s-s}{t-s}\right)=-1$

$\therefore\ t=(e^s+1)(e^s+s)+s \cdots$ ㉠

$h(1)=\alpha \Rightarrow g(\alpha)=1=f(s)$

$f(s)=e^s+s=1 \quad \therefore\ s=0$

㉠에 대입 $\alpha=2$

$g(t)=f(s)=e^s+s$

$g(h(t))=t \Rightarrow h'(t)\cdot g'(h(t))=t$

$t=1$ 대입 $h'(1)\cdot g'(h(1))=1$

$\Leftrightarrow h'(1)\cdot g'(2)=1$

㉠ 미분 $\Rightarrow 1=\{e^s(e^s+s)+(e^s+1)^2+1\}\frac{ds}{dt}$

$g'(t)=(e^s+1)\frac{ds}{dt}$

$=(e^s+1)\left\{\frac{1}{e^s(e^s+s)+(e^s+1)^2+1}\right\}$

$g'(2)=\frac{2}{1+4+1}=\frac{1}{3}$

$\therefore\ h'(1)=\frac{1}{g'(2)}=3$

30. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$와 구간 $(0,\infty)$에서 $g(x)\ge 0$인 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

283

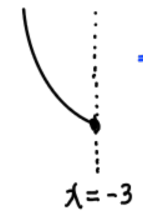
(가) $x\le -3$인 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\ge f(-3)$이다.

(나) $x>-3$인 모든 실수 x에 대하여 $\underline{g(x+3)}\underline{\{f(x)-f(0)\}^2}=\underline{f'(x)}$이다.

⊕ ⊕ ⊕

$\int_4^5 g(x)\,dx=\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

(가) $f(x)\ge f(-3) \Rightarrow$



$\Rightarrow f(x)$ $(-\infty,-3)$에서 감소함수

(나) $x=0$ 대입 $0=f'(0)$

$g(x+3)\ge0,\ \{f(x)-f(0)\}^2\ge0 \Rightarrow f'(x)\ge0$

$\Rightarrow f'(x)=4x^2(x+3)=4x^3+12x^2 \xRightarrow{\text{대입}} g(x+3)=\frac{4x^3+12x^2}{(x^4+4x^3)^2}$

$f(x)=x^4+4x^3+C$

$\int_4^5 g(x)dx=\int_1^2 g(x+3)dx=\int_1^2\frac{4x^3+12x^2}{(x^4+4x^3)^2}dx$

Let $x^4+4x^3=t,\ (4x^3+12x^2)dx=dt$

$=\int_5^{48}\frac{1}{t^2}dt$

$=\left[-\frac{1}{t}\right]_5^{48}$

$=\frac{43}{240}$

$\therefore$ 283

※ 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

○ 이어서, 「**선택과목(기하)**」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.