4점 vs B형(기하)

제 2 교시

수학 영역(B형)

1. 원점을 중심으로 θ 만큼 회전하는 회전변환을 f, 행렬 $\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$ $(k>1)$ 로 나타내어지는 일차변환을 g 라 하자. 원

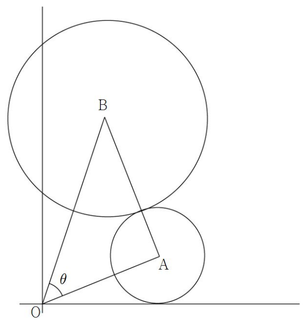
$$C_1 : (x-2)^2+(y-1)^2=1$$

이 합성변환 $f \circ g$ 에 의하여 원 C_2 로 옮겨질 때, 두 원 C_1, C_2 가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 두 원 C_1, C_2 의 중심을 각각 A, B라 할 때, $\angle \mathrm{OAB}=\dfrac{\pi}{2}$ 이다.
>
> (나) 원 C_2 는 원 C_1 과 한 점에서 만난다.

$k+\cos\theta$ 의 값은? (단, $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$) [4점]

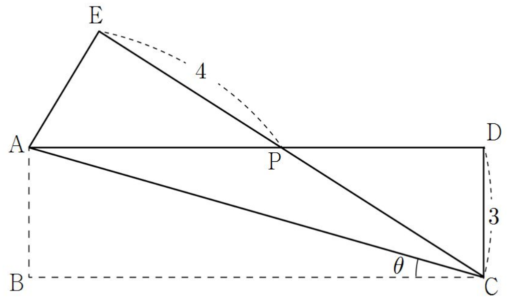
① $\dfrac{5}{3}$ ② $\dfrac{11}{6}$ ③ 2 ④ $\dfrac{13}{6}$ ⑤ $\dfrac{7}{3}$



$\overline{\mathrm{OA}}=\sqrt{5}$, $\overline{\mathrm{AB}}=k+1$, $\overline{\mathrm{OB}}=\sqrt{5}k$ 에서 삼각형 피타고라스 정리 이용하면 $k=\dfrac{3}{2}$ 이고, $\cos\theta=\dfrac{1}{k}$

따라서 답은 ④ $\dfrac{13}{6}$

2. 그림과 같이 가로의 길이가 a, 세로의 길이가 3인 직사각형 ABCD를 대각선 AC를 따라 접어서 생기는 두 점 P, E 대하여 $\overline{\mathrm{PE}}=4$ 이다. $\angle \mathrm{ACB}=\theta$ 라 할 때, $\tan 3\theta$ 의 값은?
(단, a는 상수이고, 점 P는 선분 AD 위에 있다.) [4점]

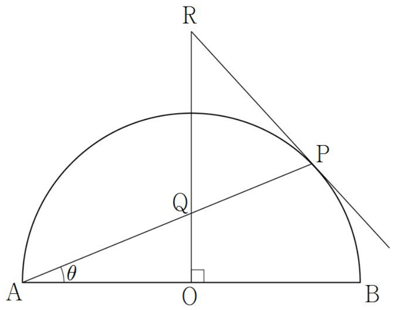


① 1 ② $\dfrac{11}{9}$ ③ $\dfrac{13}{9}$ ④ $\dfrac{5}{3}$ ⑤ $\dfrac{17}{9}$

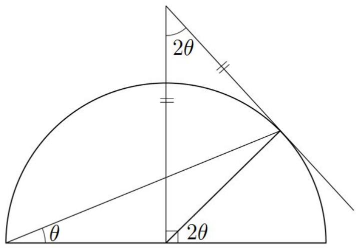
$\angle \mathrm{APE}=2\theta$ 이므로 $\tan 2\theta=\dfrac{3}{4}$

$\tan\theta=\dfrac{1}{3}$ $(a=9)$ 이므로 답은 ③ $\dfrac{13}{9}$

3. 그림과 같이 중심이 O이고 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원이 있다. 호 AB위의 점 P를 $\angle PAB=\theta$ $\left(0<\theta<\frac{\pi}{4}\right)$가 되도록 잡는다. 점 O를 지나고 선분 AB에 수직인 직선이 선분 AP와 만나는 점과 반원 위의 점 P에서의 접선과 만나는 점을 각각 Q, R이라 할 때, 삼각형 PQR의 넓이를 $S(\theta)$라 하자. $\displaystyle\lim_{\theta\to\frac{\pi}{4}-0}\frac{S(\theta)}{\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)^2}$의 값은? [4점]



① $\frac{1}{2}$　② 1　③ $\frac{3}{2}$　④ 2　⑤ $\frac{5}{2}$



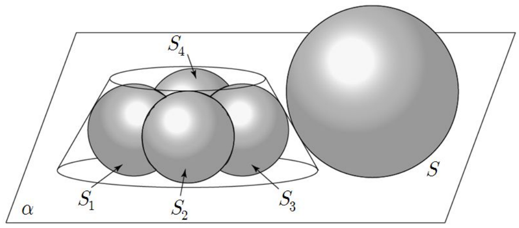
위 그림과 같이 삼각형 PQR은 이등변삼각형이다.

답은 ④ 2

4. 그림과 같이 평면 α위에 밑면의 중심이 O이고 반지름의 길이가 6인 원뿔대가 놓여있고, 다른 밑면의 반지름의 길이는 4이다. 반지름의 길이가 모두 $\sqrt{3}$이고 중심이 O_k $(k=1, 2, 3, 4)$인 네 구 $S_k$$(k=1, 2, 3, 4)$가 원뿔대의 두 밑면에 동시에 접하고 S_1, S_3은 원뿔대의 옆면에 접한다. S_2, S_4가 모두 S_1, S_3에 접할 때, 평면 α, 원뿔대에 접하고 중심이 A인 구 S가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 두 점 O_1, O_3의 평면 α위로의 정사영이 각각 O_1', O_3'일 때, $\angle O_1'OO_3'=180°$이다.
(나) 평면 AO_1O_3은 평면 α와 수직이다.
(다) 평면 AO_2O_4와 평면 α가 이루는 각의 크기를 θ_1이라 할 때, $\tan\theta_1=\frac{2\sqrt{3}}{9}$이다.

직선 O_2A와 평면 α가 이루는 각의 크기를 θ_2라 할 때, $\sin^2\theta_2=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



구 S의 반지름의 길이를 r이라 하면

$\tan\theta_1=\frac{2\sqrt{3}}{9}$이므로 $\dfrac{r-\sqrt{3}}{6+\frac{r}{\sqrt{3}}}=\frac{2\sqrt{3}}{9}$이다.

따라서 구 S의 반지름의 길이는 $3\sqrt{3}$이다.

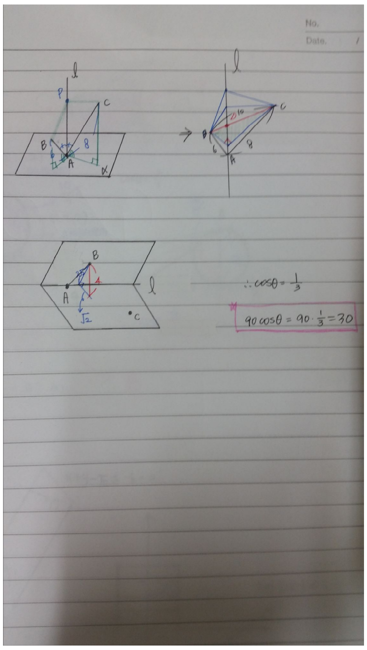
$\sin^2\theta_2=\frac{1}{8}$　답은 9

5. 평면 α 위의 점 A를 지나고, 평면 α에 수직인 직선 l과 두 점 B, C가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\overline{\mathrm{AB}}=6$, $\overline{\mathrm{AC}}=8$
(나) 선분 AB와 선분 AC가 평면 α와 이루는 각의 크기는 서로 같다.
(다) 직선 l위의 한 점 P에 대하여 $\overline{\mathrm{BP}}+\overline{\mathrm{CP}}$의 최솟값은 10이다.

$\overline{\mathrm{BP}}+\overline{\mathrm{CP}}$가 최소가 되도록 하는 점 P를 D라 할 때, 점 B와 평면 ACD사이의 거리는 4이다. 평면 ACD와 평면 ABD가 이루는 예각의 크기를 θ라 할 때, $90\cos\theta$의 값을 구하시오. [4점]

손 해설



$\cos\theta=\frac{1}{3}$ 답은 30

6. 좌표공간에 직선 l이 있다. 모든 자연수 k에 대하여 선분 $\mathrm{A}_k\mathrm{B}_k$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 선분 $\mathrm{A}_k\mathrm{B}_k$의 중점이 직선 l위에 있다.
(나) $\overline{\mathrm{A}_1\mathrm{B}_1}\perp l$, $\overline{\mathrm{A}_k\mathrm{B}_k}//\overline{\mathrm{A}_1\mathrm{B}_1}$
(다) $\overline{\mathrm{A}_k\mathrm{A}_{k+1}}=2$, $\overline{\mathrm{A}_k\mathrm{B}_k}=2$

선분 $\mathrm{A}_k\mathrm{B}_k$를 지름으로 하는 원을 C_k라 할 때, 원 C_k를 포함하는 평면과 직선 l이 이루는 각의 크기 a_k를

$$a_k=\begin{cases}\frac{|4-k|}{6}\pi & (k\le 6)\\ a_{k-6} & (k\ge 7)\end{cases}$$

이라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. C_3의 원 C_1을 포함하는 평면 위로의 정사영의 넓이는 $\frac{\pi}{2}$이다.
ㄴ. 직선 l과 평행한 광선에 의해 생긴 C_3의 원 C_2 위로의 그림자의 넓이는 $\frac{\sqrt{3}}{2}\pi$이다.
ㄷ. C_k의 원 C_1을 포함하는 평면 위로의 정사영의 넓이를 S_k라 할 때, $\sum_{k=2}^{19}S_k=(6+3\sqrt{3})\pi$이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

ㄱ. C_1과 C_3 사이의 각은 $\frac{\pi}{3}$이므로 O

ㄴ. 그림자 넓이는 $\pi\times\cos\frac{\pi}{3}\times\sec\frac{\pi}{6}$ X

ㄷ. 수열 a_n은 6을 주기로 가지는 수열이다.

$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\pi+\frac{\pi}{2}+0+\frac{\pi}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\pi+\pi\right)\times 3$ O

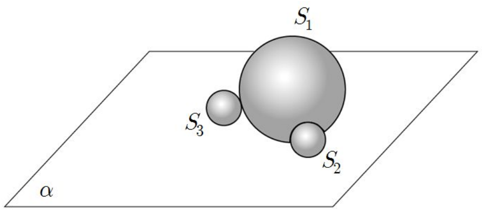
답 ③ ㄱ, ㄷ

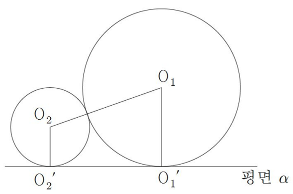
7. 평면 α 위에 놓여 있는 두 구 S_1, S_2와 중심이 점 A 인 구 S_3이 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 구 S_1의 반지름의 길이는 3이고, 두 구 S_2, S_3의 반지름의 길이는 1이다.
> (나) 점 A와 평면 α 사이의 거리는 2이다.
> (다) 두 구 S_2, S_3은 구 S_1에 외접한다.

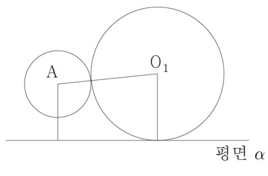
S_1, S_2의 중심을 각각 $\mathrm{O_1}$, $\mathrm{O_2}$이라 하자. 두 점 $\mathrm{O_1}$, $\mathrm{O_2}$를 지나고 평면 α와 수직인 평면을 β, 두 점 $\mathrm{O_1}$, A을 지나고 평면 α와 수직인 평면을 γ라 할 때, 두 평면 β, γ는 수직이다. 삼각형 $\mathrm{O_1O_2A}$의 평면 α 위로의 정사영의 넓이는? [4점]

① $\sqrt{35}$ ② $2\sqrt{10}$ ③ $3\sqrt{5}$ ④ $5\sqrt{2}$ ⑤ $\sqrt{55}$





선분 $\mathrm{O_1}'\mathrm{O_2}'$의 길이는 $2\sqrt{3}$



A에서 α평면에 내린 수선의 발을 A′라 할 때,
선분$\mathrm{O_1}'\mathrm{A}'$의 길이는 $\sqrt{15}$
이므로 삼각형의 정사영의 넓이는 $\frac{1}{2}\times 2\sqrt{3}\times\sqrt{15}$

답 ③ $3\sqrt{5}$

8. 좌표공간에서 직선 $l : \frac{x}{2}=1-y=z-3$을 포함하는 평면 α와 평면 $\beta : 2x-y-2z+1=0$이 있다. 직선 l 위의 점 A$(2,\ 0,\ 4)$에서 평면 β에 내린 수선의 발을 P, 직선 l과 두 평면 α, β의 교선 m과 만나는 점을 Q, 점 A에서 직선 m에 내린 수선의 발을 R이라 할 때, 평면 APQ와 평면 APR이 이루는 각의 크기가 $\frac{\pi}{3}$이다. 두 평면 α, β가 이루는 각의 크기를 θ라 할 때, $\cos^2\theta=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

답 : $\cos\theta=\frac{\sqrt{5}}{3}$이므로 답은 14

풀이방법이 3가지입니다. 3가지 모두 생각해 보세요.

9. 좌표공간에서 직선 $l : x=2-y=\frac{z}{2}$ 와 평면 α가 점 $\mathrm{P}(a,\ b,\ c)$에서 수직으로 만난다. 직선 l위의 점 $\mathrm{A}(1,\ 1,\ 2)$에 대하여 선분 AP를 지름으로 하는 구 S와 평면 β가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 점 A를 지나는 평면 β의 한 법선벡터는 $\vec{n}=(1,\ 1,\ -2)$이다.
> (나) 구 S와 평면 β가 만나서 생긴 도형의 평면 α 위로의 정사영의 넓이는 $\frac{20}{9}\pi$이다.

$a+b+c$의 값은? (단, $a>0$) [4점]

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

두 평면 $\alpha,\ \beta$가 이루는 각의 크기를 θ라 하면 $\cos\theta=\frac{2}{3}$

$\overline{\mathrm{AP}}=2\sqrt{6}$ 이므로 점 P의 좌표는

$(1,\ 1,\ 2)+2(1,\ -1,\ 2)$

$(1,\ 1,\ 2)-2(1,\ -1,\ 2)$

이 중 $a>0$이므로 $(a,\ b,\ c)=(3,\ -1,\ 6)$

답 : ④ 8

10. 좌표공간에서 xy평면에 접하는 구 S와 구 S위를 움직이는 점 P가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 점 P와 z축사이의 거리의 최댓값과 최솟값이 각각 8, 2이다.
> (나) 구 S가 평면 $x+2y+2z=25$에 접한다.

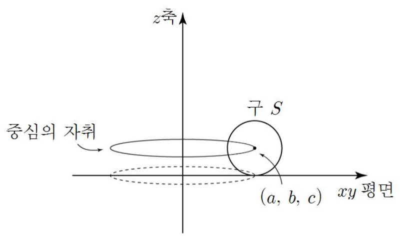
구 S의 중심을 $(a,\ b,\ c)$라 할 때, $a+b+c$의 값을 구하시오. (단, $a>0$)[4점]

거리의 최댓값과 최솟값을 뺀 값은 지름의 값이므로

$6=2c$

$\Leftrightarrow c=3$

두 거리 8, 2를 합한 값을 2로 나누면 구의 중심과 z축 사이의 거리인 5가 되므로 $a^2+b^2=25$



평면과 구의 접점을 $(a+t,\ b+2t,\ 3+2t)$로 놓을 수 있고, $t=1$이므로 $(a+1,\ b+2,\ 5)$는 평면위의 점이기 때문에 $a+1+2b+4+10=25$

$a+2b=10$이므로 $a^2+b^2=25$와 연립하면 $(a,\ b)$의 순서쌍이 $(0,\ 5)$, $(4,\ 3)$이고, 이 중 $a>0$이므로 $a=4,\ b=3,\ c=3$

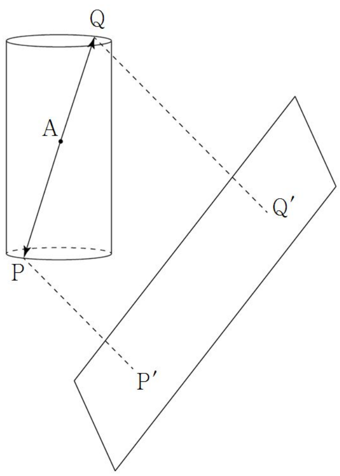
참고) $c=-3$일 때 만족하는 $a,\ b$가 없습니다.

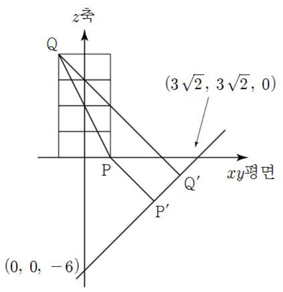
답은 10

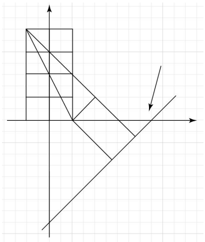
11. 좌표공간에 있는 원기둥이 다음 조건을 만족시킨다.

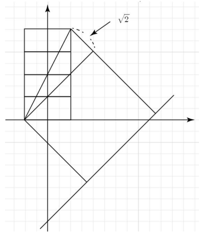
(가) 한 밑면의 중심은 원점이고 다른 밑면은 평면 $z=4$ 위에 놓여있다.
(나) 밑면의 반지름의 길이가 1이다.

점 $A(0,\ 0,\ 2)$에 대하여 이 원기둥의 두 밑면의 둘레 위를 움직이는 서로 다른 두 점을 각각 P, Q라 할 때, $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{QA}=0$을 만족시킨다. 두 점 P, Q에서 평면 $x+y-\sqrt{2}z-6=0$에 내린 수선의 발을 각각 P′, Q′라 할 때, $|\overrightarrow{QQ'}-\overrightarrow{PP'}|$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 하자. M^2+m^2의 값을 구하시오. [4점]





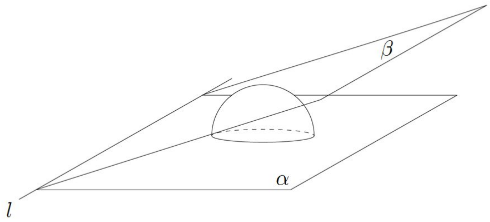




-최대일 때 $3\sqrt{2}$　　-최소일 때 $\sqrt{2}$

답은 20

12. 그림과 같이 중심이 A이고 반지름의 길이가 6인 반구가 평면 α 위에 놓여있고, 평면 β와 한 점에서 만난다. 두 평면 α, β의 교선을 l이라 할 때, 반구의 밑면과 직선 l사이의 거리의 최솟값이 4이다.



두 평면 α와 β가 이루는 예각의 크기를 이등분하는 평면 γ와 반구가 만나서 생기는 원의 중심을 B, 그 원 위의 한 점을 P라 하자. 반구의 밑면 위의 점 Q에 대하여 $|\overrightarrow{AQ}+\overrightarrow{BP}|$의 최댓값은?

① $6+\sqrt{23}$　② $6+2\sqrt{6}$　③ 11
④ $6+\sqrt{26}$　⑤ $6+3\sqrt{3}$

두 평면 α, γ가 이루는 각의 크기를 θ라 할 때, $\tan\theta=\frac{1}{3}$

$|\overrightarrow{AQ}+\overrightarrow{BP}|=|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AQ}|$

이므로 최댓값은 $6+\sqrt{26}$

13. 양수 t에 대하여 $\log t$의 지표를 $f(t)$라 할 때, 두 자연수 a, b가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a \geq 10$, $b \geq 10$
(나) $f(a)+f(b) \leq n$
(다) $\log a$와 $\log b$의 가수는 모두 $\log 2.5$이하이다.

$b-a$의 최댓값을 a_n이라 할 때, $\frac{a_4}{a_3}$의 값은? [4점]

① $\frac{81}{8}$　② $\frac{41}{4}$　③ $\frac{83}{8}$　④ $\frac{21}{2}$　⑤ $\frac{85}{8}$

13번부터 21번까지는 4점 vs A형 배포문항과 해설이 겹치므로 A형 해설지를 활용하세요.

14. 1이상의 양수 t에 대하여 $\log t$의 지표와 가수를 각각 $f(t)$, $g(t)$라 하자. 자연수 n에 대하여

$$f(t)=\log_2(3ng(t)+1)$$

을 만족시키는 서로 다른 모든 t의 개수를 a_n이라 할 때, $a_4+a_5+a_6+a_7$의 값을 구하시오. [4점]

15. 좌표평면에서 양수 k에 대하여 $\log k$의 지표와 가수를 각각 x좌표와 y좌표로 갖는 점을 P_k라 하자. 점 $\mathrm{A}(3,\ 1)$에 대하여 두 양수 $s,\ t$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $10 \le s < t < 1000$
(나) 세 점 $\mathrm{P}_s,\ \mathrm{P}_t,\ \mathrm{A}$가 한 직선 위에 있다.

$\log \dfrac{t^2}{s}$의 값은? [4점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

16. 자연수 n에 대하여 원

$$x^2+(y-n)^2=1$$

과 직선

$$y=kx$$

의 교점이 존재하지 않도록 하는 모든 자연수 k의 개수를 a_n이라 하자. $\sum_{n=2}^{10} a_n$의 값을 구하시오. [4점]

17. 자연수 n에 대하여 좌표평면 위의 점 P_n을 다음 규칙에 따라 정한다.

> (가) 점 P_1의 좌표는 $(2,\ 1)$이다.
> (나) 선분 $\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}$을 $n : n+1$로 내분하는 점은 $(0,\ 2)$이다.

점 P_9의 좌표가 $(a,\ b)$일 때, $a+b$의 값을 구하시오. [4점]

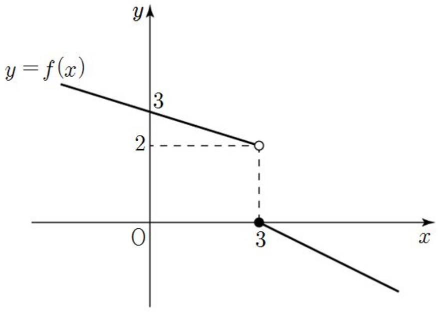
18. 좌표평면에서 직선

$$l : x+y=k$$

이 있다. 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시키는 모든 자연수 k의 개수를 a_n이라 할 때, $\sum_{k=1}^{7} a_k$의 값을 구하시오. [4점]

> (가) 직선 l이 원 $x^2+y^2=2^{2n-1}$과 <u>만나지 않는다</u>.
> (나) 직선 l이 원 $x^2+y^2=2^{2n+1}$과 서로 다른 두 점에서 만난다.

19. 함수 $f(x)=\begin{cases} -\frac{1}{3}x+3 & (x<3) \\ -\frac{1}{2}x+\frac{3}{2} & (x \ge 3) \end{cases}$ 의 그래프가 그림과 같다.



자연수 k에 대하여 수열 $\{a_n\}$은 $a_1=k$이고

$a_{n+1}=f(a_n)\ (n \ge 1)$

을 만족시킬 때, $b_k=\lim_{n\to\infty} a_{2n-1}$이라 하자. $\sum_{k=1}^{5} b_k$의 값은? [4점]

① $\frac{27}{2}$　② 14　③ $\frac{29}{2}$　④ 15　⑤ $\frac{31}{2}$

20. 다음 조건을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c, d의 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$의 개수를 구하시오. [4점]

(가) $a+b+c+d=6$
(나) $2^a \times 3^b \times 5^c \times 6^d$ 은 4로 나누어떨어진다.

21. 닫힌 구간 $[0,\ k]$에서 정의된 연속확률변수 X의 확률밀도함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(x) = -ax^2(x-3)$
(나) $\mathrm{P}(t \le X \le 2) = 1 - \int_0^t f(x)dx \ (0 < t < 2)$

$\mathrm{E}(X) = \frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.
(단, k는 상수이고, p과 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]