01. [판사님, 저는 암산하지 않았습니다]

sol)

$2A=\begin{pmatrix}2&2\\4&2\end{pmatrix}$이므로 모든 성분의 합은

$\therefore\ 2+2+4+2=10$

02. [스쳐가는 극한 계산의 성질들]

sol)

$$\lim_{n\to\infty}n\left(n-\sqrt{n^2-1}\right)=\lim_{n\to\infty}n\cdot\frac{n^2-\left(n^2-1\right)}{\left(n+\sqrt{n^2-1}\right)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+\sqrt{n^2-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$$

03. [3초 만에 만들었을 것 같은 문제]

sol)

두 점 A,B의 거리는 $\sqrt{3^2+2^2+6^2}=7$이므로 반지름은 $\frac{7}{2}$입니다.

04. [바이어슈트라스 치환]

sol.1)

바이어슈트라스 치환에 의하면

$$\therefore\ \cos 2\theta=\frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}=\frac{1-\frac{5}{9}}{1+\frac{5}{9}}=\frac{9-5}{9+5}=\frac{2}{7}$$

sol.2)

$1+\tan^2\theta=\sec^2\theta=\frac{1}{\cos^2\theta}=\frac{14}{9}$이므로 $\cos^2\theta=\frac{9}{14}$이고

$$\therefore\ \cos 2\theta=2\cos^2\theta-1=\frac{9}{7}-1=\frac{2}{7}$$

05. [...]

sol)

$\vec{a}\cdot\vec{b}=x-4-9=0$이므로 $x=13$입니다.

06. [역행렬 안 구할건데?]

sol)

주어진 상황은 결국 점 $(1,1)$이 일차변환 f에 의하여 점 (a,b)로 옮겨지는 것이기에 번거롭게 역행렬 계산할 필요가 없습니다.

$$\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&2\\4&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\7\end{pmatrix}\ \to\ a+b=12$$

07. [아니, 리듬농구님 이건 너무 재탕 아닙니까]

sol)

$\mathrm{V}(X)=npq$에서 $6=n\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{5}\ \to\ n=25$입니다.

> [2015학년도 09월 리듬농구 모의고사 수학 영역(B형) 09번]
>
> [8~9] **한 개의 주사위와 한 개의 동전을 동시에 한 번 던지는 것을 하나의 시행이라 하자. 이 동전의 앞면에는 숫자 1이 써 있고, 뒷면에는 숫자 2가 써 있을 때, 8번과 9번의 두 물음에 답하시오.**
>
> **9.** n회 시행했을 때, 주사위의 눈의 수와 동전에 적혀있는 수가 같은 시행의 횟수를 확률변수 X라 하자. $\{\mathrm{E}(X)\}^2=\mathrm{V}(6X)$일 때, 자연수 n의 값은? [3점]
>
> ① 2 ② 5 ③ 30 ④ 72 ⑤ 180

08. [조건부 확률]

sol)

$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(B\cap A)}{\mathrm{P}(A)}$이므로 $\mathrm{P}(A)=\frac{\mathrm{P}(B\cap A)}{\mathrm{P}(B|A)}=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}$

따라서 $\mathrm{P}(A^C)=1-\mathrm{P}(A)=\frac{1}{3}$이 답이 됩니다.

09. [이게 무슨 소리죠? ☞ http://cafe.naver.com/pnmath/459208]

sol)

$\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\cos x$이므로 $f(x)=k\sin x+3\cos x$이고 딱히 정의역에 대한 제한이 없으므로 전 실수 구간에서 정의된다 볼 수 있습니다. 이때 최댓값은 $\sqrt{k^2+9}=8$이므로 $k^2=64-9=55$가 답이 됩니다.

10. [잘 보고 숫자 대입해서 연립하면 끝나는 문제]

sol)

$$\begin{cases}\log K_1=a-\frac{1}{3}\log 10+\frac{20}{10}\\ \log K_2=a-\frac{1}{3}\log 100+\frac{500}{100}=\log\frac{10}{K_1}\end{cases}$$

두 식을 더해보면

$$\log K_1+\log\frac{10}{K_1}=2a-\frac{1}{3}-\frac{2}{3}+2+7$$

즉, $1=2a+6$으로 $a=-\frac{5}{2}$가 답입니다.

11. [그래서 평가원 문제가 아름답다]

sol)

양변을 x에 관해 미분하면

$2xf(2x)\cdot 2 = 8x^3$

이므로 다시 $x=1$을 대입해보면 $4f(2)=8$에서 $f(2)=2$가 나옵니다.

> [2010년 09월 평가원 수리(가형) 28번]
>
> **28.** 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 모든 실수 t에 대하여
>
> $$\int_0^2 xf(tx)dx = 4t^2$$
>
> 을 만족시킬 때, $f(2)$의 값은? [3점]
>
> ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

12. [존재하지 않는 것끼리 존재하지 않음이 같다고 볼 수는 없는가]

sol)

주어진 식과 같이 무한급수간에 등치하기 위해서는 각각의 무한등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$과 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1}$이 모두 어떠한 값에 수렴해야 함을 전제해야 합니다.

가령, $\lim_{x\to 0}\left|\frac{1}{x}\right| = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}$와 같은 표기는 수학적으로 의미가 없습니다.

그러니 등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r이라 두어도 일반성을 잃지 않으며, 당연히 $-1<r<1$이 되어야 합니다. 그러면 준 식은

$2(27+27r+27r^2+\cdots) = 27+27r^2+27r^4+\cdots$

가 되어 마저 계산해보면

$2\cdot\frac{27}{1-r} = \frac{27}{1-r^2} \rightarrow 1+r = \frac{1}{2} \rightarrow r = -\frac{1}{2}$

임을 알 수 있습니다. 따라서 답은

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{3n-2} = a_1 + a_4 + a_7 + \cdots = \frac{a_1}{1-r^3} = \frac{27}{1+\frac{1}{8}} = 24$$

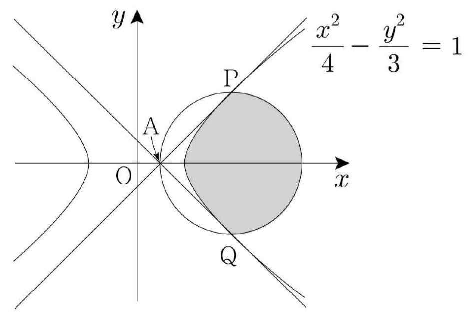
> [2005년 11월 대수능 수리(가형) 13번]
>
> **13.** 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 각각
>
> $$a_n = \frac{1}{2^{n-1}}\cos\frac{(n-1)\pi}{2}$$
>
> $$b_n = \frac{1+(-1)^{n-1}}{2^n}$$
>
> 일 때, <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은? [4점]
>
> <보 기>
>
> ㄱ. 모든 자연수 k에 대하여 $a_{3k}<0$이다.
>
> ㄴ. 모든 자연수 k에 대하여 $a_{4k-1}+b_{4k-1}=0$이다.
>
> ㄷ. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{3}{5}\sum_{n=1}^{\infty} b_n$
>
> ① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
>
> ④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄴ, ㄷ

13. [사교육을 걱정하지 않아도 될 문제]

sol)

$\mathrm{F}(2,0)$이므로 해당하는 회전체의 부피는

$\therefore\ \pi\int_0^2 y^2 dx = \pi\int_0^2 8x dx = 16\pi$

> [2009년 10월 교육청 수리(가형) 21번]
>
> **21.** 그림과 같이 점 $\mathrm{A}(1,0)$에서 쌍곡선 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{3}=1$에 그은 접선이 쌍곡선과 만나는 두 점을 각각 P, Q라 하자.
>
> 
>
>
> 세 점 A, P, Q를 지나는 원의 내부가 쌍곡선에 의해 나뉘어서 생긴 두 영역 중에서 넓이가 큰 영역을 x축의 둘레로 회전시킨 회전체의 부피는 V이다. $\frac{V}{\pi}$의 값을 구하시오. [4점]

14. [리듬농구님의 무류에 아이디어를 탁 치고 갑니다]

sol)

점 F를 지나고 기울기가 2인 직선은 $y=2(x-2)=2x-4$입니다. 이 직선 위의 점 (x,y)가 일차변환 f에 의해 옮겨지는 점 (x',y')에 관해

$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$

가 성립하므로 $x=\frac{1}{k}x', y=\frac{1}{k}y'$을 직선의 방정식에 대입하면

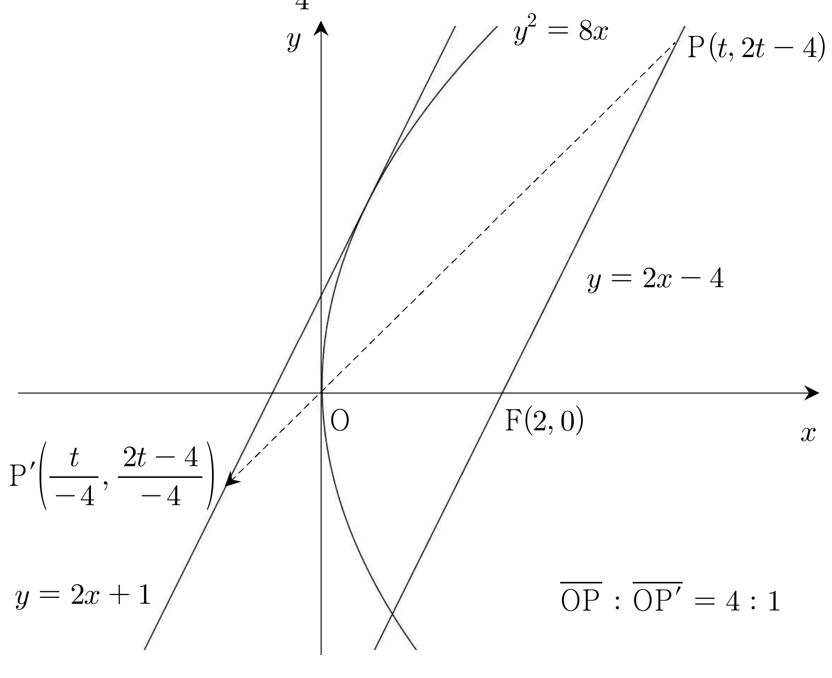
$\frac{1}{k}y' = \frac{2}{k}x' - 4 \rightarrow y' = 2x' - 4k$

가 됩니다. 그런데 표현을 매끄럽게 하기 위해 $y'=2x'-4k$를 다시 $y=2x-4k$라 고칠 수 있습니다.

한편, 포물선 $y^2=8x$에 대하여 기울기가 2인 접선의 방정식은

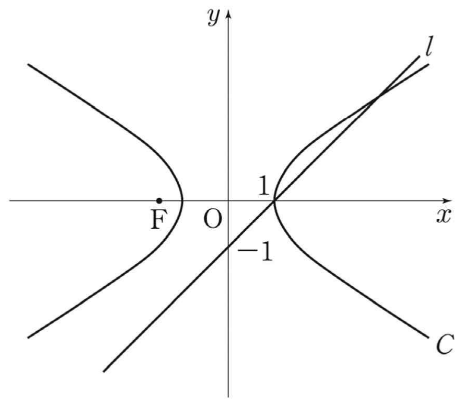
$y = 2x + \frac{2}{2}$

로 $-4k=1 \rightarrow k=-\frac{1}{4}$이 됩니다.



[2013년 11월 대수능 수학 영역(B형) 14번]

[13～14] 그림과 같이 직선 $l: x-y-1=0$과 한 초점이 점 $\mathrm{F}(c, 0)$ (단, $c<0$)인 쌍곡선 $C: x^2-2y^2=1$이 있다. 13번과 14번의 두 물음에 답하시오.



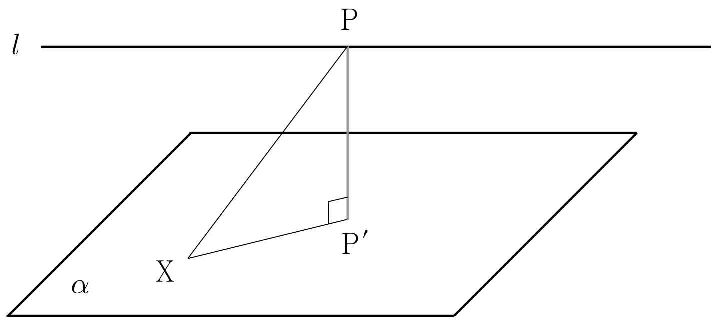
14. 원점을 중심으로 θ만큼 회전하는 회전변환에 의하여 직선 l은 쌍곡선 C의 초점 F를 지나는 직선으로 옮겨진다. $\sin 2\theta$의 값은? [4점]

① $-\dfrac{2}{3}$ ② $-\dfrac{5}{9}$ ③ $-\dfrac{4}{9}$ ④ $-\dfrac{1}{3}$ ⑤ $-\dfrac{2}{9}$

15. [당신은 믿고 쓰는 단면화의 저주에서 풀렸습니다]

$sol.1)$

평면 α와 직선 l은 평행해서 만나지 않기에 서로 간에 떨어져 있는 거리라는 개념을 논할 수 있습니다.

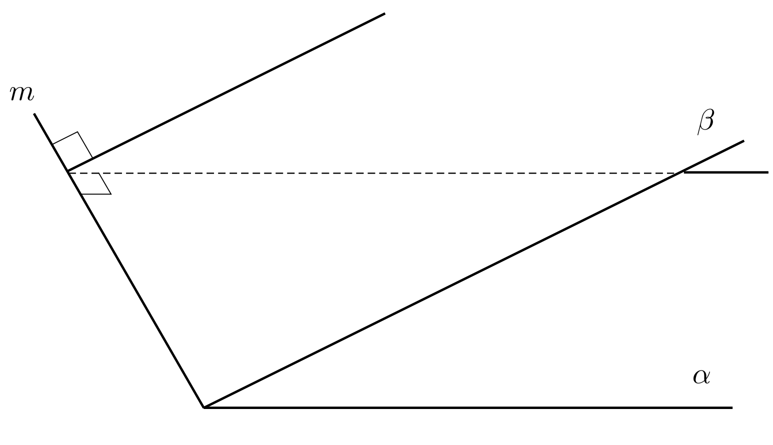


가령, 위 그림과 같이 직선 l 위의 한 점 P를 고정하고, 평면 α 위로 내린 수선의 발을 P′이라 하고, 평면 α 위의 임의의 점을 X라 하면 삼각형 PP′X는 직각삼각형이 되고,

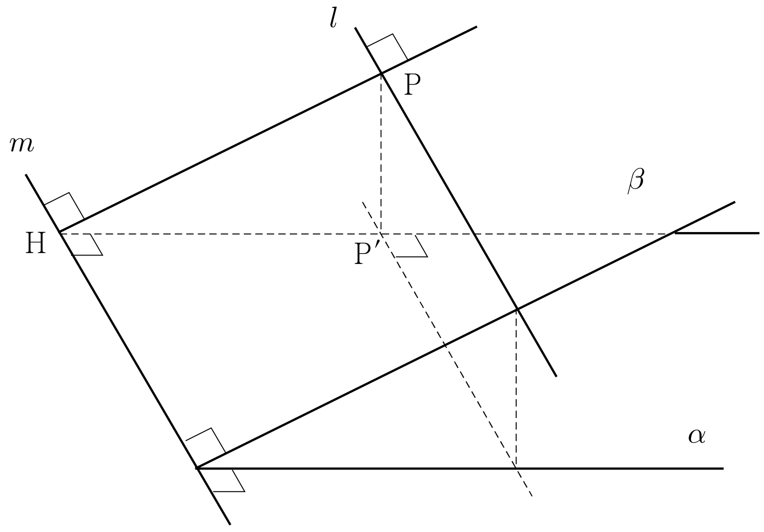
$$\overline{\mathrm{PX}} = \sqrt{\overline{\mathrm{PP'}}^2 + \overline{\mathrm{P'X}}^2} \geq \overline{\mathrm{PP'}} = 4$$

로서 $\mathrm{X} = \mathrm{P'}$가 될 때 $\overline{\mathrm{PX}}$의 최솟값은 4가 되는 상황입니다.

이때, 직선 l을 포함하고, 평면 α와 만나는 또 다른 평면 β가 존재하며 그 교선이 m이라 하였습니다. 이를 나타내면 다음과 같습니다.



한편, 두 직선 l, m의 거리가 5라고 하였으니 적어도 두 직선은 평행하거나 꼬인 위치여야 거리를 논할 수 있습니다. 하지만 두 직선 모두 평면 β 상에 존재하므로 꼬인 위치일 수는 없으니 평행해야만 합니다.



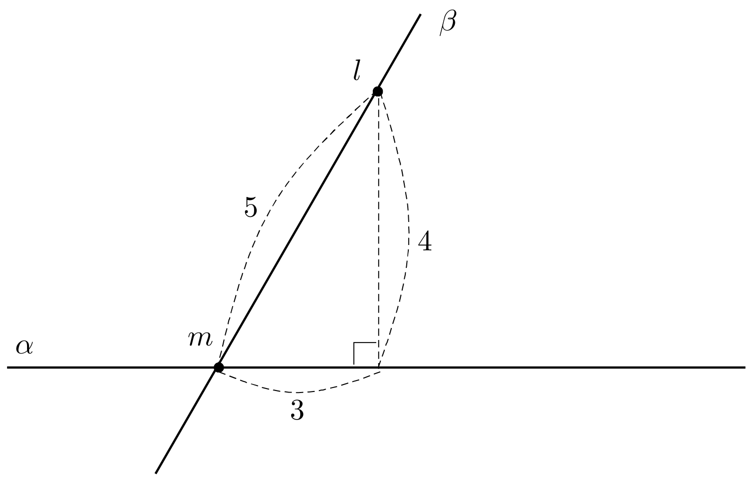
만약 직선 l 위의 한 점 P에서 평면 α에 내린 수선의 발을 P′라 하고, 직선 m에 내린 수선의 발을 H라 하면 삼각형 PP′H가 직각삼각형이므로

$\overline{\mathrm{PP'}} = 4, \overline{\mathrm{PH}} = 5 \rightarrow \overline{\mathrm{P'H}} = 3$

이고, 두 평면 α, β가 이루는 이면각의 크기에 대하여 코사인 값은 $\dfrac{\overline{\mathrm{P'H}}}{\overline{\mathrm{PH}}} = \dfrac{3}{5}$가 됨을 알 수 있습니다. 따라서, 평면 β 위의 넓이가 15인 삼각형 ABC의 평면 α 위로 정사영한 도형의 넓이는 $15 \times \dfrac{3}{5} = 9$가 됩니다.

$sol.2)$

주어진 상황을 표현하는 가장 적절한 단면을 살펴 보겠습니다.



두 평면은 직선처럼, 두 직선은 점처럼 보이는 위치입니다. 따라서 두 평면의 이면각의 크기에 대한 코사인 값이 $\dfrac{3}{5}$이므로 평면 β 위의 넓이가 15인 삼각형 ABC의 평면 α 위로 정사영한 도형의 넓이는 $15 \times \dfrac{3}{5} = 9$로 동일하게 나옵니다.

[2004년 09월 평가원 수리(가형) 23번]

23. 좌표공간에 반구 $(x-5)^2+(y-4)^2+z^2=9,\ z \geq 0$가 있다. y축을 포함하는 평면 α가 반구와 접할 때, α와 xy평면이 이루는 각을 θ라 하자. 이때, $30\cos\theta$의 값을 구하시오. (단, $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$) [4점]

16. [점화식 마스터 ☞ http://cafe.naver.com/pnmath/397382]

sol)

주어진 점화식을 해결하기 위해서 양변을 $(n+1)n(n-1)$로 나누어야

$$\frac{a_{n+1}}{(n+1)n} = \frac{a_n}{n(n-1)} + 2^{n-1}\ (n \geq 2)$$

으로, $b_n = \dfrac{a_n}{n(n-1)}$으로 치환해서 다음의 꼴을 얻을 수 있습니다. 그러면

$$b_{n+1} = b_n + 2^{n-1}\ (n \geq 2)$$

이므로 (가)에 들어갈 식은 $f(n) = 2^{n-1}$입니다. 이는 계차수열 형태인데,

$$b_n = b_1 + \sum_{k=1}^{n-1}(b_{k+1} - b_k)\ (n \geq 2)$$

라는 일반적인 계차수열의 일반항 공식으로서 접근할 수 없습니다. 왜냐하면 $b_n = \dfrac{a_n}{n(n-1)}$으로 치환한 모습에서 보다시피 $n=1$일 때는 b_1이 정의되지 않기 때문입니다. 그래서 소설에서 복선을 남기는 작가처럼, 리듬농구님도 그 다음 줄에 초항으로서 $b_2 = 1$이란 정보를 제시해 주었습니다. 모든 정보들을 고려하여 올바르게 수열 $\{b_n\}$의 일반항을 유도하자면 2이상의 자연수 n에 대하여

$$b_n = b_2 + \sum_{\boxed{k=2}}^{\boxed{n-1}}(b_{k+1} - b_k) = 1 + \sum_{k=2}^{n-1} 2^{k-1}$$

$$= 1 + (2^1 + 2^2 + \cdots + 2^{n-2}) = \frac{2^{n-1} - 1}{2-1} = 2^{n-1} - 1$$

이라 할 수 있습니다. 따라서 $g(n) = 2^{n-1} - 1$이고, 구하고자 하는 값은 $f(5) + g(5) = 2^4 + (2^4 - 1) = 31$이 됩니다.

※ 혹시나 만약에나 그럴 일은 없겠지만, $b_n = b_2 + \sum_{k=2}^{n-1}(b_{k+1} - b_k)$ 부분이 와 닿지 않는다면 축차대입법을 통해서도 확인할 수 있습니다. 즉, 점화식

$$b_{n+1} - b_n = 2^{n-1}\ (n \geq 2)$$

의 양변에 $n \Rightarrow 2, 3, 4, \cdots, n-1$을 대입하여 변변 더하면

$$\begin{aligned} b_3 - b_2 &= 2 \\ b_4 - b_3 &= 2^2 \\ b_5 - b_4 &= 2^3 \\ &\vdots \\ b_n - b_{n-1} &= 2^{n-2} \\ \hline b_n - b_2 &= 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{n-2} \end{aligned}$$

따라서 $b_n = 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{n-2}$이라 볼 수 있습니다.

17. [제군들, 리듬스칸이 쳐들어 오고 있습니다]

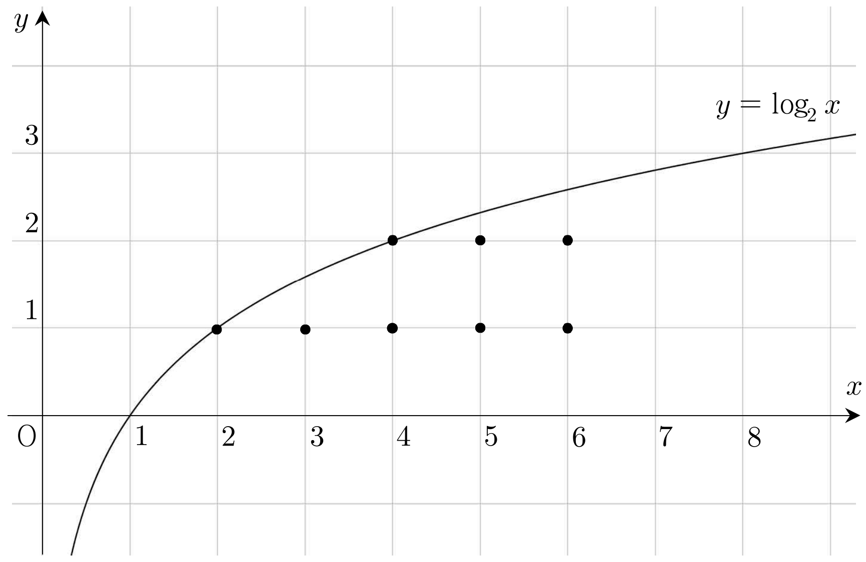
sol)

정말 뜬금없는 조합이죠! 가만히 있는 로그함수와 조건부 확률과 확률분포 개념을 섞어서 만든 문항입니다.

먼저 자연수 격자점을 헤아리기 위해서 경우를 나누어 순서쌍을 찾든지 아니면 좌표평면에 모눈 그려가며 해당하는 점들을 찾으면 됩니다.

그래서 x좌표가 짝수인 것들과 홀수인 것들은 따로 구분해서 이항분포를 잡은 다음, 정규분포로 근사해서 확률값을 구하면 됩니다.

우선은 로그함수부터 그려 보도록 하겠습니다.



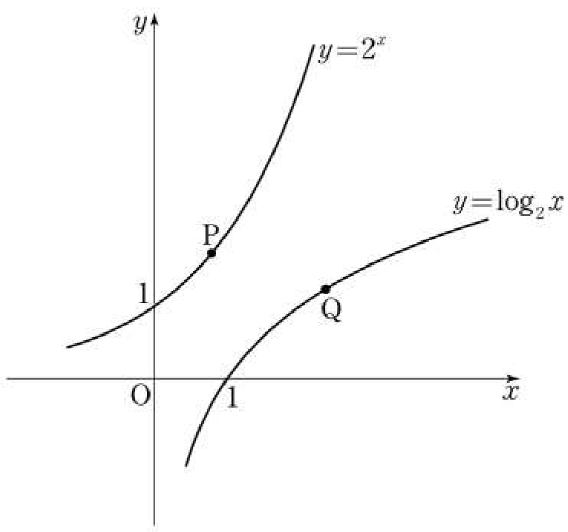
이때 0은 자연수가 아닙니다! 총 8개의 점 중에서 x좌표가 짝수인 점들은 5개이므로 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(240, \dfrac{5}{8}\right)$을 따릅니다. 이를 정규분포로 근사시키면 X는 정규분포 $\mathrm{N}\left(150, \dfrac{15^2}{2^2}\right)$를 따른다고 볼 수 있으며, 고로

$$\mathrm{P}(X \geq 135) = \mathrm{P}\left(Z \geq \frac{135-150}{\frac{15}{2}}\right) = \mathrm{P}(Z \geq -2) = 0.9772$$

가 답이 됩니다.

[2014학년도 수능 직전 포카칩 모의평가 (B)형 14번]

[13～14] 곡선 $y=2^x$ 위의 점 P와 곡선 $y=\log_2 x$ 위의 점 Q에 대하여 13번과 14번의 두 물음에 답하시오.



14. 다음 조건을 만족시키는 점 P의 x좌표를 a, 점 Q의 x좌표를 b라 할 때, 순서쌍 (a, b)의 개수는? [4점]

(가) 점 P의 x좌표와 점 Q의 x좌표가 정수이다.
(나) $\overline{\mathrm{PQ}} \leq 4$

① 10 ② 12 ③ 14 ④ 16 ⑤ 18

18. [어떤 식으로 나오든 안정적으로 풀 수 있는 해법]

$sol.1)$

$y=f(x)$가 y축 대칭임을 고려해서 부등식을 정리해보겠습니다.

$f(x)-4>0$이면, $x<-\gamma$ 또는 $x>\gamma$라 볼 수 있고, 주어진 부등식은 $f(x)\le g(x)$가 되어 해당하는 x는 존재하지 않습니다. 즉, 다시 말해서 주어진 부등식이 $f(x)-4>0 \Leftrightarrow x<-\gamma$ 또는 $x>\gamma$일 때는 해집합이 공집합이 됩니다.

그리고 $f(x)-4<0 \Leftrightarrow -\gamma<x<0,\, 0<x<\gamma$일 때는 $f(x)\ge g(x)$가 되어 해당하는 x의 범위는

$-\gamma<x\le -4,\ \ \alpha\le x<0,\ \ 0<x\le\beta$

가 되어 이를 만족하는 정수 x는 $-5,\,-4,\,-3,\,-2,\,-1,\,1$로 6개 존재합니다.

$sol.2)$

친절하게 사차함수 $f(x)$의 극값을 모두 알려주었으니 최고차항 계수를 k라 두고서 정리해보면

$f(x)=k(x+4)^2(x-4)^2,\ \ f(0)=4\ \to\ k=\dfrac{1}{4}$

가 되어서 $f(x)$의 정체를 구체적으로 찾을 수 있습니다. 이때 주어진 부등식 $1\le\dfrac{g(x)-4}{f(x)-4}$을 다루기 쉽도록 다항식 형태를 대입해보면

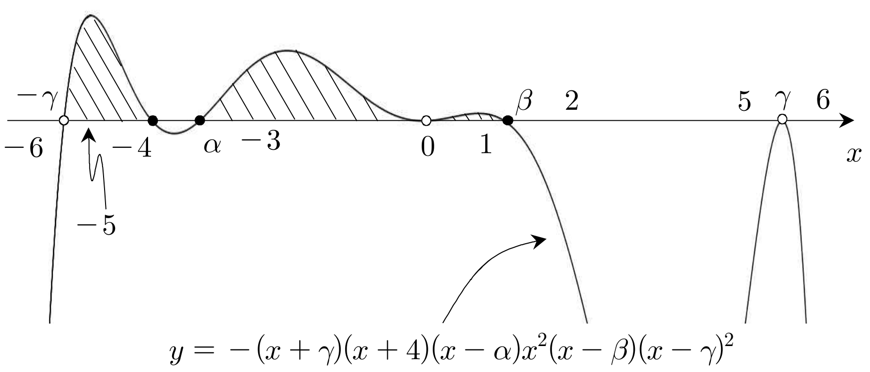
$$\frac{g(x)-f(x)}{f(x)-4}=\frac{-\cancel{k}(x+4)(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)}{\cancel{k}x^2(x+\gamma)(x-\gamma)}\ge 0$$

여기서 분모, 분자의 공통 인수를 약분하지 않은 채 그대로 동치변형해보면

$-(x+\gamma)(x+4)(x-\alpha)x^2(x-\beta)(x-\gamma)^2\ge 0,\ \ x\ne 0,\ \pm\gamma$

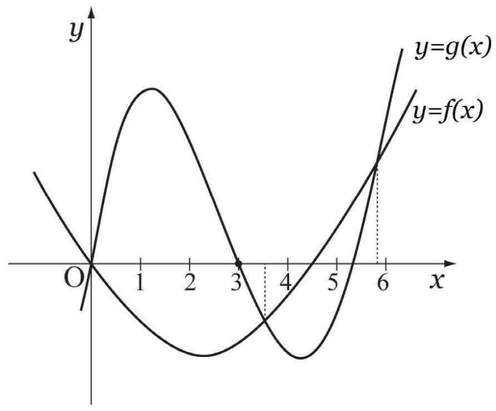
가 되고, 이를 다항함수로 해당하는 영역을 수직선상에 나타내어 보면 다음과 같습니다. 약식으로나마 8차함수를 그리는 셈입니다. 그러면 해의 범위는

$-\gamma<x\le -4,\ \ \alpha\le x<0,\ \ 0<x\le\beta$



[2009년 07월 교육청 수리(가형) 20번]

20. 그림은 이차함수 $y=f(x)$와 삼차함수 $y=g(x)$의 그래프이다. $x>0$일 때 부등식 $\left\{\dfrac{f(x)}{g(x)}\right\}^2-\dfrac{g(x)}{f(x)}\ge 0$을 만족하는 모든 정수해의 곱을 구하시오. [3점]



19. [행렬아 고마워 ㅠㅠ]

$sol)$

$AB^2+AB^4=AB^2(E+B^2)=E$에서

$AB^2(E+B^2)=B^2(E+B^2)A=(E+B^2)AB^2=E$

$B+BA^2=B(E+A^2)=E$에서

$B(E+A^2)=(E+A^2)B=E$

임을 알 수 있습니다. 왜냐하면 이차정사각행렬 $X,\,Y$에 대하여 $XY=E$가 성립한다면 $Y=X^{-1}$로서 $XY=XX^{-1}=E=X^{-1}X=YX$가 되어 곱셈에 대한 교환법칙이 성립하기 때문입니다.

ㄱ. $AB^2(E+B^2)=E$로부터 $A^{-1}=B^2(E+B^2)$이라 할 수 있고,
$B^2(E+B^2)A=E$로부터 $B^{-1}=B(E+B^2)A$라 해도 되고,
$B(E+A^2)=E$로부터 $B^{-1}=E+A^2$이라 보아도 되므로 ㄱ은 참.

ㄴ. ㄱ으로부터 A,B의 역행렬이 모두 존재하고 $B^{-1}=E+A^2$임을 이용하면 아래의 유사 수능 기출에서도 적용되듯
$AB^{-1}=A(E+A^2)=A+A^3=(E+A^2)A=B^{-1}A$
즉, $AB^{-1}=B^{-1}A$이고, 양변에 오른쪽과 왼쪽에서 한 번씩 B를 가하면
$B(AB^{-1})B=B(B^{-1}A)B\ \to\ BA=AB$
가 성립하므로 ㄴ도 참입니다.

ㄷ. 가만 보니 $B-B^2+B^3-B^4=(B-B^2)(E+B^2)$이라 할 수 있고,
$AB^2(E+B^2)=E$임을 알고 있으니 ㄷ의 양변에 AB를 가해보면
$A^2B=(E-B)AB^2(E+B^2)=E-B\ \to\ B+A^2B=E$
가 됩니다. 이는 ㄷ이 참이라 가정한 상태에서 식을 분석하여 처음 제시한 정보를 이끌어 내었으니 다시 역순으로 종합하여 보이겠습니다.
$B+BA^2=E$에서 A,B는 곱셈에 대한 교환법칙이 성립하므로
$\to\ A^2B=E-B$에서 $AB^2+AB^4=E$를 우변에 곱하면
$\to\ A^2B=(E-B)(AB^2+AB^4)$에서 $A^{-1}B^{-1}$을 양변에 곱하면
$\to\ A=(E-B)(B+B^3)=B-B^2+B^3-B^4$가 되어 ㄷ도 참.

고로, 답은 ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ입니다.

※ ㄷ을 의도한 리듬농구님의 풀이는 $A^{-1}=B^2+B^4$과 $B^{-1}=E+A^2$에서 두 번째 식에 A^{-1}을 가해서

$A^{-1}B^{-1}=A^{-1}+A\ \to\ (B^2+B^4)B^{-1}=(B^2+B^4)+A$

로부터 $A=B-B^2+B^3-B^4$을 얻는 것이었다 합니다.

[2013년 11월 대수능 수학 영역(B형) 17번]

17. 두 이차정사각행렬 $A,\,B$가

$$AB+A^2B=E,\quad (A-E)^2+B^2=O$$

를 만족시킬 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, E는 단위행렬이고, O는 영행렬이다.) [4점]

<보 기>

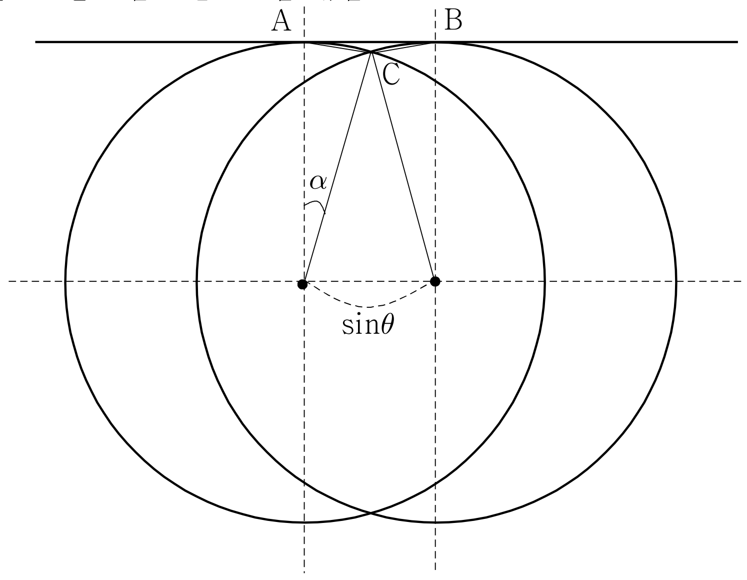
ㄱ. B의 역행렬이 존재한다.
ㄴ. $AB=BA$
ㄷ. $(A^3-A)^2+E=O$

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

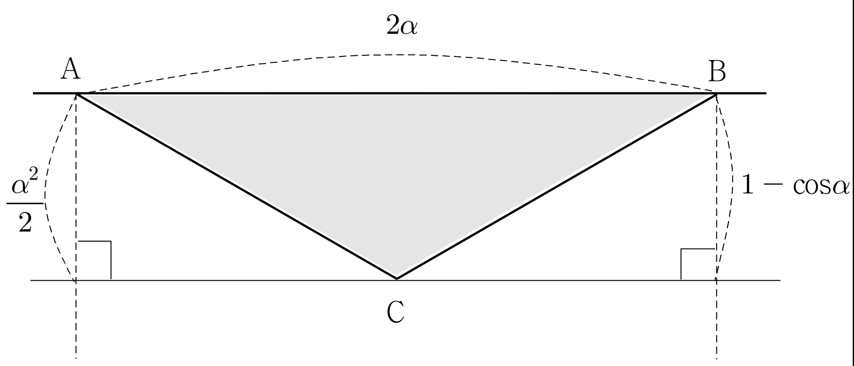
20. [몇몇 극한 문제들에서의 비밀]

sol.1)

$\theta \to +0$인 상황에서 어차피 근사는 사용할 요량인데, 추가적으로 또 다른 매개변수 α를 다음과 같이 도입하겠습니다.



그러면 원의 중심사이의 거리는 $\sin\theta = 2\sin\alpha$에서 $\theta \to +0$일 때 $\alpha \to +0$이어야 하므로 $\theta \simeq 2\alpha$로 근사 가능합니다. 이때 삼각형 ABC 부근을 다시 확대하여 관찰해보면



$S(\theta) \simeq \frac{1}{2}\cdot 2\alpha \cdot \frac{\alpha^2}{2} = \frac{\alpha^3}{2}$이므로 $\frac{S(\theta)}{\theta^3} \simeq \frac{\frac{\alpha^3}{2}}{8\alpha^3} = \frac{1}{16}$이 답이 됩니다.

※ 이제 와서 처음으로 근사 풀이의 매력에 빠져버렸다면 대단히 위험합니다. 이러한 해법은 어디까지나 기존 해법을 충분히 익힌 상위권들을 위한 지적 유희의 차원이지, 근사로 풀어야만 한다는 것을 강조하려 함은 결코 아닙니다. 그래도 궁금해서 잠이 안 온다고 하시는 분들은 다음 링크를 참고해주세요.

몇몇 극한 문제들에서의 비밀 ☞ http://cafe.naver.com/pnmath/355274

sol.2)

$\sin\theta = 2\sin\alpha$에서부터 시작하겠습니다. 삼각형 ABC의 밑변을 변 AB로 보면 높이를 마저 구하는 것이 관건인데, 이는 α도 충분히 작은 양수이므로

$$1-\cos\alpha = 1-\sqrt{1-\sin^2\alpha} = 1-\sqrt{1-\frac{1}{4}\sin^2\theta}$$

가 됩니다. 따라서 0으로 가는 요소들이 드러나도록 적절하게 정리 해주면

$$S(\theta) = \frac{1}{2}\sin\theta\left(1-\sqrt{1-\frac{1}{4}\sin^2\theta}\right)$$

$$= \frac{\sin\theta\cdot\frac{1}{4}\sin^2\theta}{2\left(1+\sqrt{1-\frac{1}{4}\sin^2\theta}\right)} = \frac{\sin^3\theta}{8\left(1+\sqrt{1-\frac{1}{4}\sin^2\theta}\right)}$$

가 되어 $\theta \to +0$일 때

$$\frac{S(\theta)}{\theta^3} = \frac{1}{8}\cdot\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^3\cdot\frac{1}{1+\sqrt{1-\frac{1}{4}\sin^2\theta}} \to \frac{1}{16}$$

21. ["리듬농구 GAMMA(깜마) N제" 나오길 기원합니다]

sol)

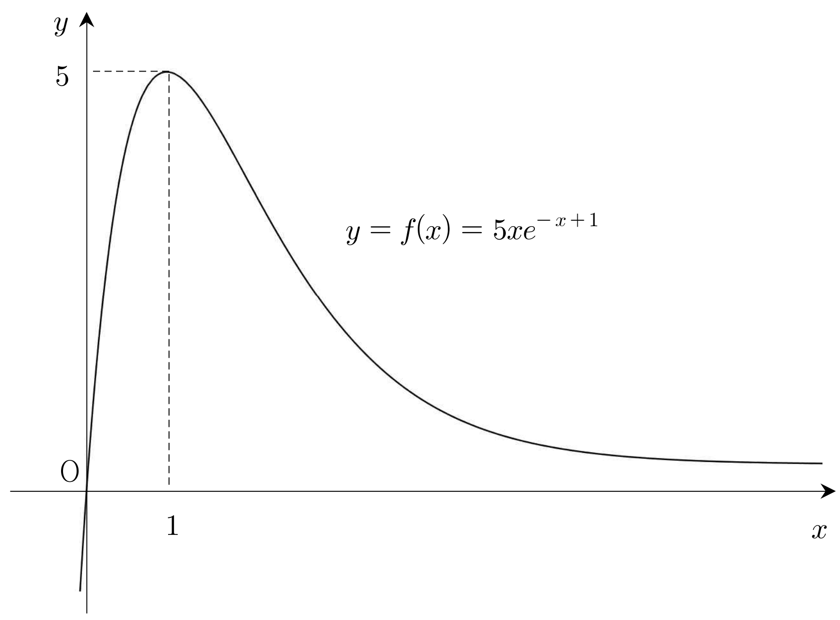
우선 $f(x)$의 개형부터 정확하게 그려보도록 하겠습니다.

$$f'(x) = 5e^{-x+1} - 5xe^{-x+1} = 5(1-x)e^{-x+1}$$

이므로 $x=1$에서 $f(x)$는 극댓값 $f(1)=5$를 갖고,

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x}{e^{x-1}} = 0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} 5xe^{-x+1} = -\infty \end{cases}$$

로 곡선 $f(x)$의 점근선이 x축임을 알 수 있습니다. 이를 바탕으로 그래프를 그려보면 다음과 같습니다. 그러면 $[1, \infty)$에서 변곡점을 반드시 갖습니다.



이때 $g(x) = f(f(x))+2$를 곧바로 그리자니 망설여지기에 얼마나 그려야 할지는 보류하고 그 다음으로 넘어 가겠습니다.

$y = |g(x)-n|$의 미분불가능점을 따져야 하는데 $y=|g(x)-n|$이 그려지는 과정을 살펴보면, 곡선을 합성하여서 얻은 곡선 $g(x) = f(f(x))+2$에 대하여 상수함수 $y=n$을 마치 새로운 x축 삼아 그 아랫부분을 접어 올린 개형이 $y=|g(x)-n|$가 됩니다. 또, $f(x)$가 미분가능하므로 $g(x)$ 또한 미분가능합니다.

이쯤에서 문제해결을 이어가기 위해 곡선 $y=g(x)$와 직선 $y=n$의 교점들을 효과적으로 다룰 수 있는 가상의 어떠한 집합에 대한 인식이 생겨날 수 있는데, 이를 구체화 해보겠습니다. 앞서 다룬 문제들과 확실히 수준이 다릅니다.

곡선 $y=g(x)$와 직선 $y=n$의 교점들 중에서 접하지 않는 일반적인 교점들의 x좌표를 크기순으로 $x_1 < x_2 < \cdots < x_s$이라 할 때, 교점들의 집합을

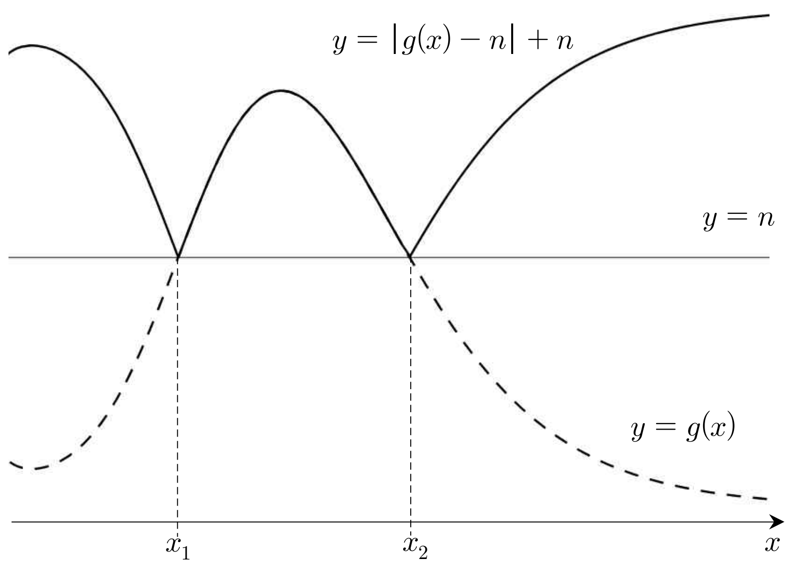
$$S = \{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \cdots, (x_s, y_s)\}$$

이라 하고, 곡선 $y=g(x)$와 직선 $y=n$의 교점들 중에서 접하는 교점들의 x좌표를 크기순으로 $x_1' < x_2' < \cdots < x_t'$이라 할 때, 교점들의 집합을

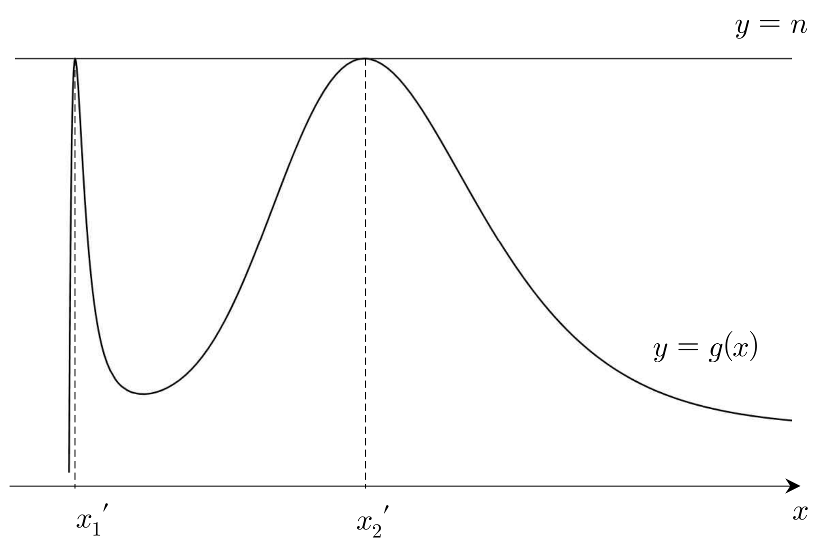
$$T = \{(x_1', y_1'), (x_2', y_2'), \cdots, (x_t', y_t')\}$$

이라 하겠습니다. 물론, s, t는 모두 적절한 자연수이고, 고정된 곡선 $y=g(x)$에 비해 유동적인 직선 $y=n$에 따라 두 집합 S, T의 원소들은 변하게 됩니다. 곧 밝혀지겠지만 그때마다 $s=n(S)=a_n$이 성립합니다.

그러면 곡선과 직선의 교점인 $x=x_i$ $(i=1,2,\cdots,s)$를 경계로 곡선 $y=|g(x)-n|$은 $y=g(x)-n$ 혹은 $y=-g(x)+n$으로 절댓값을 달리 풀 수 있고, 좌우미분계수는 $g'(x_i)$ 혹은 $-g'(x_i)$의 값을 취하되 $g'(x_i) \neq 0$임을 전제하였기에 $g'(x_i) \neq -g'(x_i)$가 되어 점 $x=x_i$에서마다 곡선 $y=|g(x)-n|$는 미분불가능하게 됩니다. 예컨대 $y=|x^2-1|$



하지만 곡선과 직선의 교점인 $x=x_j$ $(j=1,2,\cdots,t)$를 경계로 곡선 $y=|g(x)-n|$은 항상 $y=g(x)-n$이나 $y=-g(x)+n$으로 절댓값을 동일하게 풀어낼 수 있기에 $x=x_j$에서는 좌우미분계수가 모두 $g'(x_j)$ 혹은 $-g'(x_j)$로서 같기에 미분가능합니다. 예컨대 $y=|2\sin x-2|$

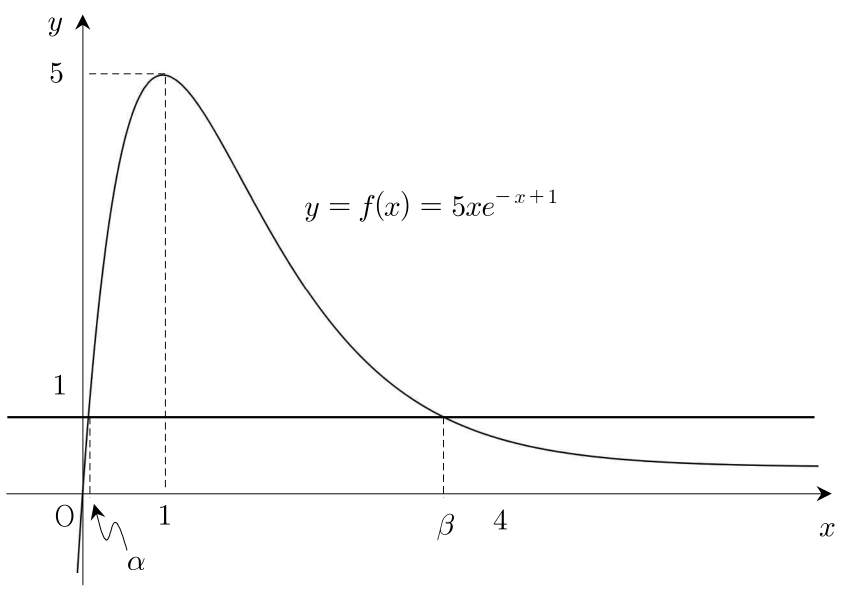


따라서, 중요한 것은 $g(x)$의 미분계수가 0이 되는 극댓점과 극솟점들입니다.

$$g'(x)=f'(f(x))f'(x)=0$$

에서 $f'(x)=0$를 만족하는 x값은 $f'(x)=5(1-x)e^{-x+1}$에서 보다시피 $x=1$이 유일하고, $f'(f(1))=f'(5)<0$이므로 곡선 $g(x)$가 $x=1$에서 마찬가지로 극댓값 $g(1)=f(5)+2=25e^{-4}+2$가 됩니다.

그리고 $f'(f(x))=0$인 x값은 $f(x)=1$, 즉 $5xe^{-x+1}=1$의 근들이 가능합니다. 마침 문제에서 $f(4)<1$이라 한 것도 이제는 납득할 수 있습니다.



위의 그래프 개형에 근거하여 $f(x)=1$의 근을 α,β라 하겠습니다. 그러면 $0<\alpha<1$과 $1<\beta<4$임을 자명하고,

$$\begin{cases} f'(f(\alpha))=f'(1)=0,\ \ f'(f(\beta))=f'(1)=0 \\ g'(x)=f'(f(x))f'(x),\ \ f'(x)=5(1-x)e^{-x+1} \end{cases}$$

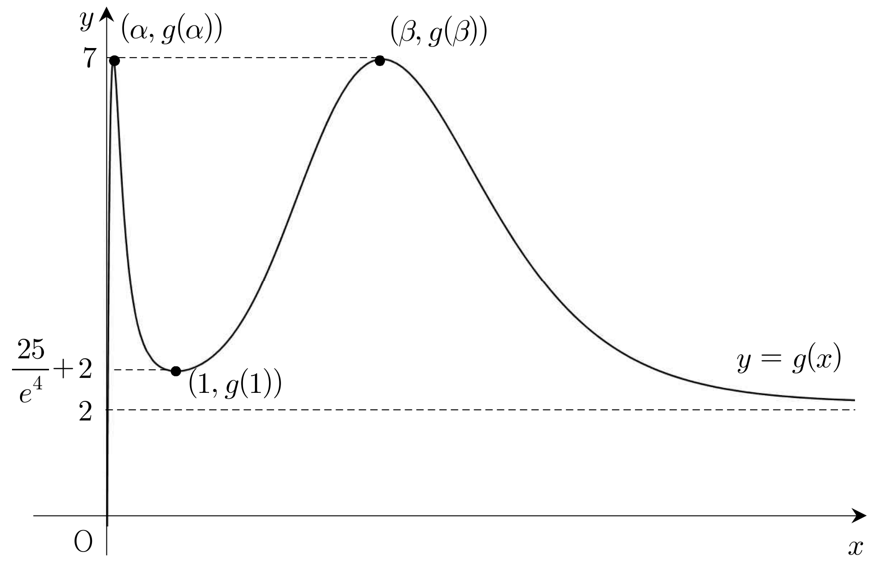
에서 $f'(\alpha)>0$이므로 $x=\alpha$의 좌우에서 $g'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로 $g(\alpha)$는 $g(x)$의 극댓값이 됩니다. 그리고 $f'(\beta)<0$이므로 $x=\beta$의 좌우에서 $g'(x)$의 부호가 역시 양에서 음으로 바뀌므로 $g(\beta)$도 $g(x)$의 극댓값이 됩니다. 이것으로 $g(x)$가 $x=\alpha,1,\beta$에서 순서대로 극대, 극소, 극댓값을 갖는다는 것을 찾았고, 한 번 더 점근선 존재 유무를 살펴보면

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\{f(f(x))+2\}=\lim\limits_{f(x)\to+0}\{f(f(x))+2\}=2 \\ \lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\{f(f(x))+2\}=\lim\limits_{f(x)\to-\infty}\{f(f(x))+2\}=-\infty \end{cases}$$

로서 곡선 $g(x)$의 점근선이 $y=2$임을 알 수 있습니다. 이제 세 극값

$$\begin{cases} g(\alpha)=f(f(\alpha))+2=f(1)+2=7 \\ g(1)=f(f(1))+2=f(5)+2=25e^{-4}+2 \\ g(\beta)=f(f(\beta))+2=f(1)+2=7 \end{cases}$$

과 점근선을 염두에 두고 $g(x)$의 개형을 그려보면 다음과 같습니다.



$n=1$일 때, 곡선 $y=g(x)$와 직선 $y=n$의 교점 집합의 원소의 개수가 각각 $n(S)=1, n(T)=0$이며 $a_1=1$이 됩니다.

$n=2$일 때도, 곡선 $y=g(x)$와 직선 $y=n$의 교점 집합의 원소의 개수가 각각 $n(S)=1, n(T)=0$이며 $a_2=1$이 됩니다.

$n=3,4,5,6$일 때, 곡선 $y=g(x)$와 직선 $y=n$의 교점 집합의 원소의 개수가 각각 $n(S)=4, n(T)=0$이며 $a_4=a_5=a_6=4$입니다.

$n=7$일 때는, 곡선 $y=g(x)$와 직선 $y=n$의 교점 집합의 원소의 개수가 각각 $n(S)=0, n(T)=2$이며 $a_7=0$가 됩니다.

끝으로 $n=8,9,10,\cdots$일 때는 곡선 $y=g(x)$와 직선 $y=n$의 교점 집합의 원소의 개수가 각각 $n(S)=0, n(T)=0$이며 $a_8=a_9=a_{10}=\cdots=0$이 됩니다.

고로, $\sum\limits_{n=1}^{10}a_n=1+1+4+4+4+4+0+0+0+0=18$이 답이 됩니다.

※ 사실 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{e^x}=0$임은 로피탈 정리를 이용하면 자명한데, 유도하기가 까다로운 탓에 혹시나 이 극한값을 알아야 하는 경우가 생긴다면 문제에서 미리 제시해주는 경우가 많습니다. 그렇다고 여기서 풀어내기엔 너무나 길고, 이 글의 목적을 벗어나는 주제이기에 흥미가 있는 분들은 참고하시길 바랍니다.

☞ http://cafe.naver.com/pnmath/328067

[2010년 11월 대수능 수리(가형) 24번]

24. 최고차항의 계수가 1이고, $f(0)=3$, $f'(3)<0$인 사차함수 $f(x)$가 있다. 실수 t에 대하여 집합 S를

$$S=\{a\,|\,\text{함수 } |f(x)-t|\text{가 } x=a\text{에서 미분가능하지 않다.}\}$$

라 하고, 집합 S의 원소의 개수를 $g(t)$라 하자. 함수 $g(t)$가 $t=3$과 $t=19$에서만 불연속일 때, $f(-2)$의 값을 구하시오. [4점]

[2013년 04월 교육청 수학 영역(B형) 30번]

30. 함수 $f(x)=x+\cos x+\frac{\pi}{4}$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=|f(x)-k| \ (k\text{는 } 0<k<6\pi\text{인 상수})$$

라 하자. 함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하도록 하는 모든 k의 값의 합을 $\frac{q}{p}\pi$라 할 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

[2014년 04월 교육청 수학 영역(B형) 30번]

30. 함수 $f(x)=\frac{\ln x^2}{x}$의 극댓값을 α라 하자. 함수 $f(x)$와 자연수 n에 대하여 x에 대한 방정식 $f(x)-\frac{\alpha}{n}x=0$의 서로 다른 실근의 개수를 a_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{10}a_n$의 값을 구하시오. [4점]

22. [힘들었지?]

sol)

$$\therefore \lim_{x\to0}\frac{\ln(24x+1)}{3x}=8\lim_{x\to0}\frac{\ln(24x+1)}{24x}=8$$

23. [대입 vs 계산]

sol.1)

33보다 더 큰 완전제곱수로 $36, 49, 64, 81, 100, 121, \cdots$

이때 $4x=3, 4, 31, 48, 67, 88, \cdots$

그리고 주어진 무리방정식을 만족하는 상황은

$$12-3=\sqrt{48+33}$$

으로 $x=12$가 답이 됩니다.

sol.2)

$$(x-3)^2=4x+33$$

$$\rightarrow x^2-10x-24=(x-12)(x+2)=0 \qquad \therefore x=12$$

24. [특정 점에서 함수가 연속이기 위한 필요충분조건]

sol)

$y=\frac{3^{x+2}-9}{x\ln3}$은 $x=0$을 제외한 모든 실수에서 연속이므로 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이기 위해서는 $x=0$에서 함숫값과 극한값이 같은 값으로 존재해야 합니다. 즉, $\lim_{x\to0}\frac{3^{x+2}-9}{x\ln3}=a$가 성립해야 하므로

$$\lim_{x\to0}\frac{3^{x+2}-9}{x\ln3}=\frac{9}{\ln3}\cdot\lim_{x\to0}\frac{3^x-1}{x}=9$$

따라서 $a=9$가 답입니다.

25. [행여나 낚시 요소는 없는지]

sol)

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$$\sum_{n=1}^{10}(a_{n+2}-a_n)=10\times2d=40 \rightarrow d=2$$

임을 알 수 있고, 따라서 $a_n=2n+20$이 됩니다. 그러므로 $a_{20}=60$이 답입니다.

26. [중복조합을 쓸 타이밍이란]

sol)

(가) 조건에 따르면 a,b,c는 적어도 2를 하나로 인수로 가져야 하고, d는 (나) 조건까지 고려했을 때 3^5로 확정할 알 수 있습니다. 만약 d를 소인수분해 하였을 때 3 이외의 소수를 인수로 갖는다면 (가) 조건에 어긋나기 때문입니다. 그러니 $a=2^p, b=2^q, c=2^r$이라 하였을 때, p,q,r은 모두 1이상의 자연수이고, $p+q+r=\log_2 4^5=\log_2 2^{10}=10$을 만족합니다.

여기서 중복조합을 사용하기 위해선 $p\geq1, q\geq1, r\geq1$을 다시

$$p-1\geq0, q-1\geq0, r-1\geq0$$

로 고치면 됩니다. 그러면 $(p-1)+(q-1)+(r-1)=7$이 되어 음이 아닌 정수 $p-1, q-1, r-1$을 택하는 경우의 수로 생각할 수 있습니다.

따라서, ${}_3H_7={}_9C_7={}_9C_2=36$이 답이 됩니다.

[2014년 09월 평가원 수학 영역(B형) 26번]

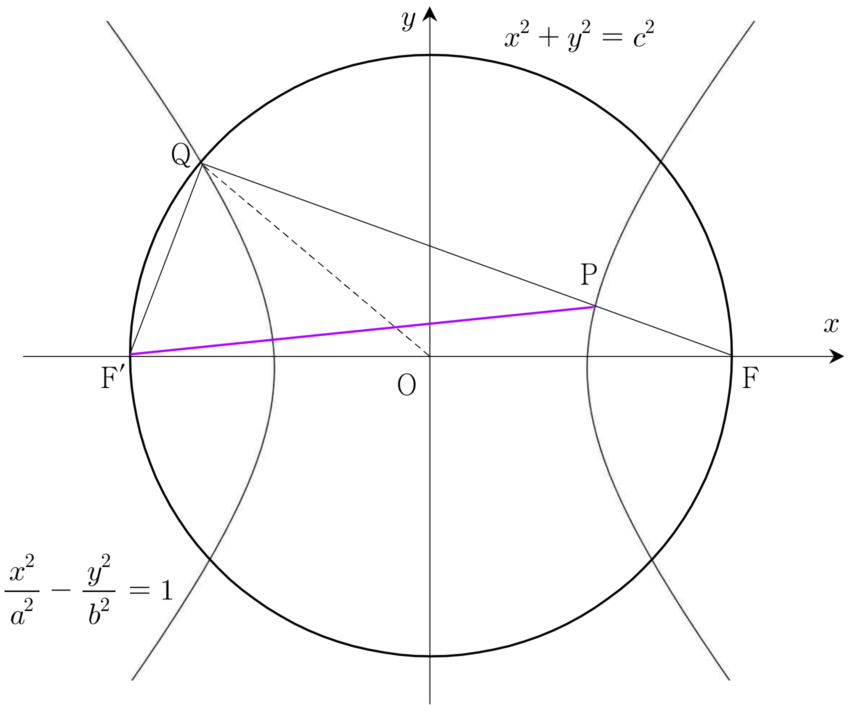
26. 자연수 n에 대하여 $abc=2^n$을 만족시키는 1보다 큰 자연수 a, b, c의 순서쌍 (a, b, c)의 개수가 28일 때, n의 값을 구하시오. [4점]

27. [이상하게 농구공 같네]

sol)

쌍곡선 주축의 길이가 10이란 점으로부터 표준형 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$에서 $2a=10$임을 알 수 있고, 이는 다시 $\overline{FQ}-\overline{F'Q}=10$을 의미합니다.

또한 원점 O로부터 세 점 F, F', Q에 이르는 거리가 같으므로 다음과 같이 원점을 중심으로 하고 반지름이 $c=\sqrt{a^2+b^2}$인 원을 생각해줄 수 있습니다.



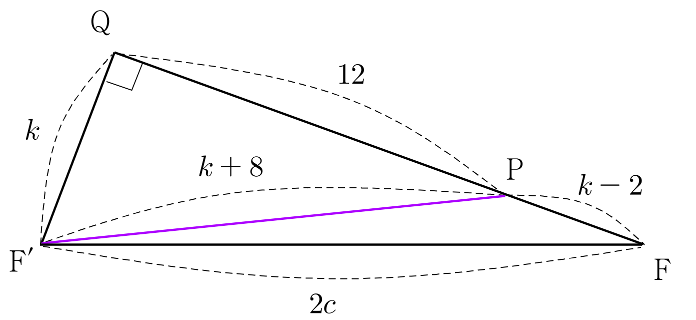
그러면 선분 FF′을 지름으로 하는 원 $x^2+y^2=c^2$에서 $\angle \mathrm{FQF'}=90°$가 되고, $\overline{\mathrm{F'Q}}=k$라 하였을 때

$\overline{\mathrm{FQ}}-\overline{\mathrm{F'Q}}=(\overline{\mathrm{FP}}+\overline{\mathrm{PQ}})-\overline{\mathrm{F'Q}}=(\overline{\mathrm{FP}}-\overline{\mathrm{F'Q}})+\overline{\mathrm{PQ}}$

$10=-2+\overline{\mathrm{PQ}} \rightarrow \overline{\mathrm{PQ}}=12$

로 $\overline{\mathrm{FP}}=k-2$가 됨을 알 수 있습니다.

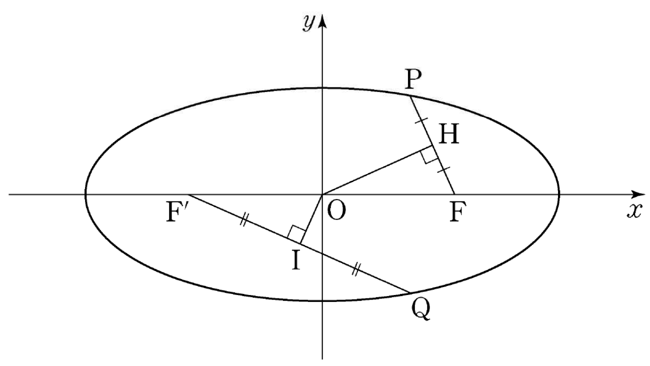
그리고, $\overline{\mathrm{F'P}}-\overline{\mathrm{FP}}=\overline{\mathrm{F'P}}-(k-2)=10$에서 $\overline{\mathrm{F'P}}=k+8$이므로 직각삼각형 PQF′의 세 변의 길이를 모두 k에 관해 나타내었으니 피타고라스 정리를 이용하여 계산만 해주면 됩니다.



그러면 $k^2+144=(k+8)^2 \rightarrow k=5$가 되고, $4c^2=5^2+15^2=250$이 나옵니다.

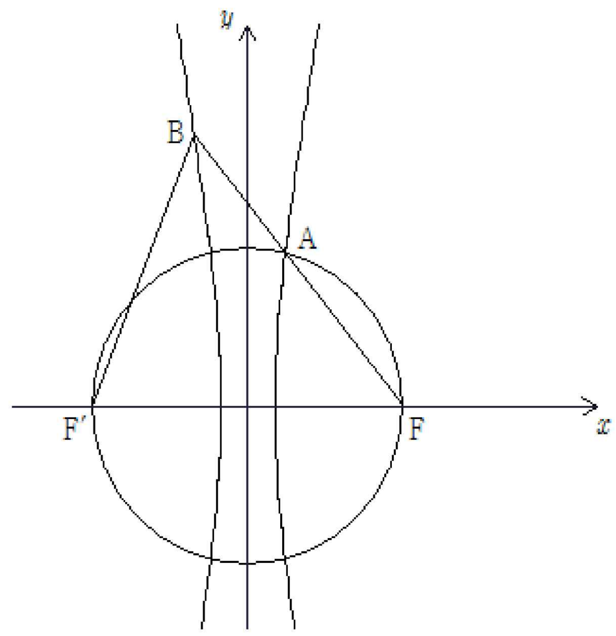
[2012년 06월 평가원 수리(가형) 27번]

27. 두 점 F(5, 0), F′(−5, 0)을 초점으로 하는 타원 위의 서로 다른 두 점 P, Q에 대하여 원점 O에서 선분 PF와 선분 QF′에 내린 수선의 발을 각각 H와 I라 하자.
점 H와 점 I가 각각 선분 PF와 선분 QF′의 중점이고, $\overline{\mathrm{OH}}\times\overline{\mathrm{OI}}=10$일 때, 이 타원의 장축의 길이를 l이라 하자. l^2의 값을 구하시오. (단, $\overline{\mathrm{OH}}\neq\overline{\mathrm{OI}}$) [4점]



[2014학년도 나의뜻 모의고사 수학 영역(B형) 제3회 17번]

17. 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$에 대하여 두 초점을 다음 그림과 같이 F, F′라 하자. 원점 O를 중심으로 하고 점 F를 지나는 원과 쌍곡선이 만나는 점 중에 제 1사분면에 있는 점을 A, 직선 AF가 쌍곡선과 만나는 점 중 제 2사분면에 있는 점을 B라 하자. $\overline{\mathrm{BF'}}=13$, $\overline{\mathrm{AB}}=5$일 때, b의 값은? (단, a, b는 양수이다.) [4점]



① $5\sqrt{2}$ ② $2\sqrt{13}$ ③ $3\sqrt{6}$ ④ $2\sqrt{14}$ ⑤ $2\sqrt{15}$

28. [낯선 문제에게서 기출의 향기가 느껴진다]

sol)

(가) 조건에 의하면 $0\le \log a \le 10$이고, (나) 조건에 의하면

$\frac{\log a}{b}=[\log n]$

임을 알 수 있습니다. 물론, 가우스 기호로서 $[x]$는 x보다 작거나 같은 최대의 정수를 의미합니다. 그런데 $[\log n]$은 자연수 값만 취할 수 있으며, 가령 $[\log n]=N_1$일 때 이를 만족하는 자연수 n의 개수는

$N_1 \le \log n < N_1+1 \rightarrow 10^{N_1}\le n < 10^{N_1+1}$

으로부터 $10^{N_1+1}-10^{N_1}=9\cdot 10^{N_1}$이 됩니다. 문제에서 그러한 자연수 n의 개수가 90이라 하였으므로 $9\cdot 10^{N_1}=90 \rightarrow N_1=1$일 수 밖에 없습니다. 즉, $\frac{\log a}{b}=[\log n]$이 오직 1만 취할 수 있지 그 밖의 값은 취할 수 없다는 것입니다. 따라서 $\frac{\log a}{b}=1 \rightarrow a=10^b$이 되고, 이러한 관계를 만족하는 주어진 범위의 순서쌍 $(a,b)=(10^b,b)$의 개수는 $b=1,2,3,\cdots,10$으로 10이 답이 됩니다. 만약 $b=0$이면 $a=10^0$으로 범위 내에 속할지라도 b가 자연수 조건에 위배되기 때문에 제외시켜주어야 마땅합니다. 여기서 실수한다면 11이라 답을 말할 수도 있겠군요!

[2013년 06월 평가원 수학 영역(A형) 30번]

30. 자연수 k에 대하여 $\log k$의 지표와 가수를 각각 x좌표와 y좌표로 갖는 점을 P_k라 하자. 다음 조건을 만족시키는 자연수 m, n의 모든 순서쌍 (m, n)의 개수를 구하시오. [4점]

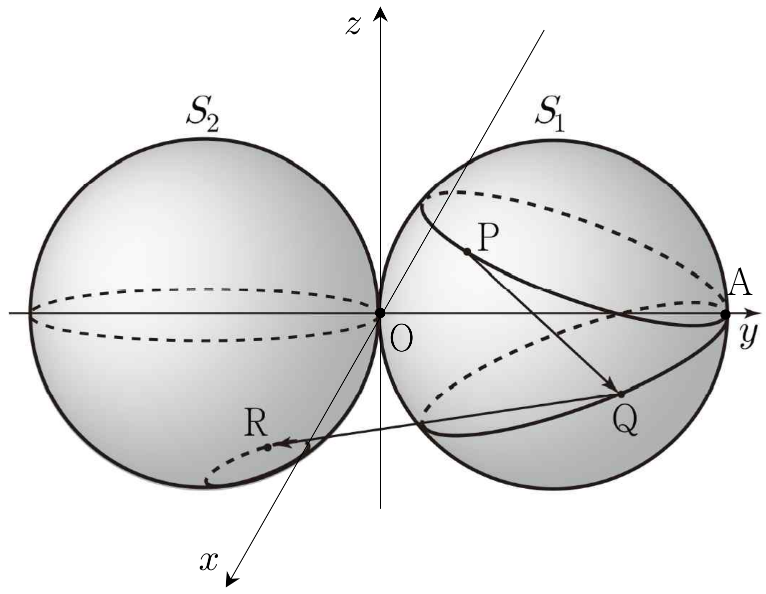
(가) $1 \leq m < n < 100$
(나) $\overline{\mathrm{P}_m \mathrm{P}_n} = \sqrt{1+(\log 2)^2}$

이과 시험뿐만 아니라 특히 문과 시험에만 등장했던 고난도 개수 세기 문제까지 언젠가는 한 번 확실하게 정리하고 싶은 분들을 위한 링크입니다.
헤아림의 원리 ☞ http://cafe.naver.com/pnmath/611695

29. [공간상 임의의 두 원 위의 점들간 거리에 대하여]

sol)

두 구 S_1, S_2는 그림상 나타나 있지 않지만 원점 $\mathrm{O}(0,0,0)$에서 외접하고 있습니다. 그리고 (가)와 (나)의 조건에서 등장하는 두 평면 $y+3z=4$와 $y-3z=4$와 구 S_1은 역시 그림상 표시되어 있지 않지만 한 점 $\mathrm{A}(0,4,0)$을 모두 포함합니다. 이는, 방정식마다 각각 수치를 넣어보면 알 수 있습니다!



이때 두 평면 $y+3z=4$와 $y-3z=4$가 이루는 이면각 중 예각인 것의 크기를 θ라 하면

$$\cos\theta = \frac{|1-9|}{\sqrt{1+9}\sqrt{1+9}} = \frac{4}{5}$$

가 됩니다. 비록 특수각은 아니지만 $3:4:5$의 길이 비를 품는 직각삼각형과 연관되어 있습니다.

그리고 구 S_1의 중심을 O_1이라 한 뒤 $|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|$가 최대가 되는 순간을 찾기 위해서 공간상의 기울어진 두 원의 방정식을 나타낼 필요 없이

$$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2 = |\overrightarrow{\mathrm{O_1Q}} - \overrightarrow{\mathrm{O_1P}}|^2 = |\overrightarrow{\mathrm{O_1Q}}|^2 + |\overrightarrow{\mathrm{O_1P}}|^2 - 2\overrightarrow{\mathrm{O_1Q}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{O_1P}}$$

로 두 점 P, Q에 대한 회전의 중심 O_1으로 벡터를 쪼갠 뒤에 제곱해서 살펴보면, 구의 반지름 $|\overrightarrow{\mathrm{O_1P}}| = |\overrightarrow{\mathrm{O_1Q}}| = 2$로 일정하며, 앞에 붙은 마이너스 부호로 인해 두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{O_1P}}, \overrightarrow{\mathrm{O_1Q}}$의 내적이 최소가 되어야 $|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|$는 최대가 되는 것을 확인 할 수 있습니다. 그러려면 $\overrightarrow{\mathrm{O_1P}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{O_1Q}} = 4\cos(\angle \mathrm{PO_1Q})$에서 코사인 함수는 구간 $[0, \pi]$에서 감소함수이므로 최종적으로 $\angle \mathrm{PO_1Q}$가 최대여야 합니다.

[2009년 09월 평가원 수리(가형) 23번]

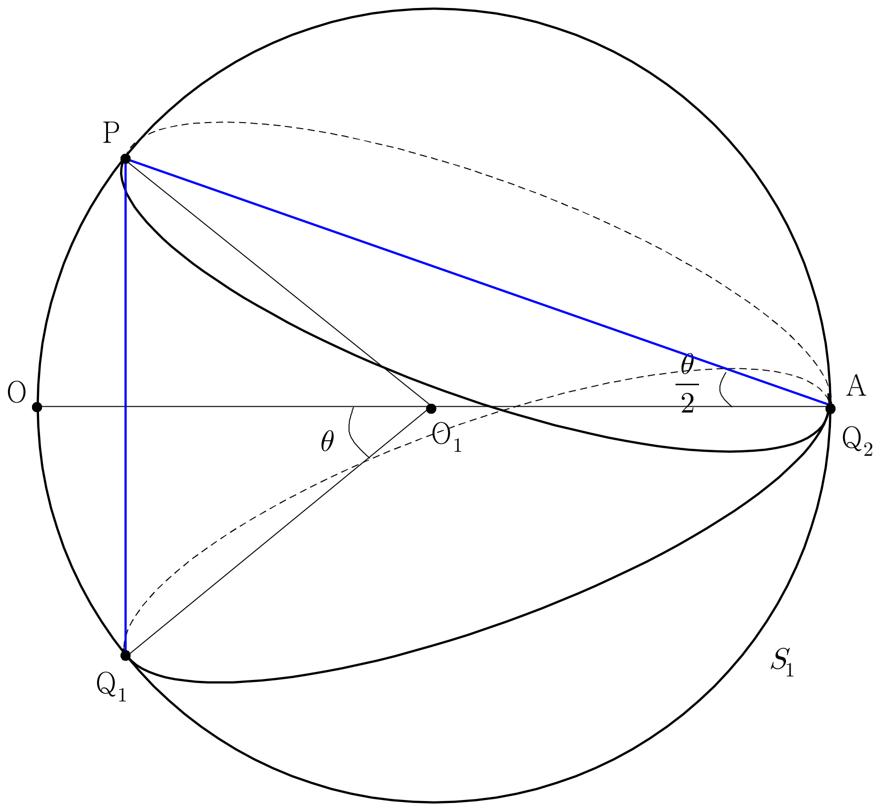
23. 좌표공간에서 구 $x^2+y^2+z^2=50$이 두 평면

$$\alpha: x+y+2z=15$$
$$\beta: x-y-4\sqrt{3}z=25$$

와 만나서 생기는 원을 각각 C_1, C_2라 하자.

원 C_1 위의 점 P와 원 C_2 위의 점 Q에 대하여 $\overline{\mathrm{PQ}}^2$의 최솟값을 구하시오. [4점]

위의 기출문제와 상당히 유사하지만 오히려 정답 상황을 떠올리는 것이 독이 될 수도 있습니다. 잘 보면 최대와 최소 중 묻는 바가 다릅니다!



확인 차, 만약 점 P가 평면 $y+3z=4$와 구 S_1에 의해 생기는 교원에서 점 A를 지나는 지름 반대쪽 끝에 위치한다 하고, 점 Q가 Q_1의 위치에 오면

$$\overline{\mathrm{PQ_1}} = 2\overline{\mathrm{O_1P}}\sin\theta = \frac{12}{5}$$

이지만, 점 Q가 점 Q_2, 즉 $\mathrm{Q}_2 = \mathrm{A}$가 될 때는

$$\overline{\mathrm{PQ_2}} = 2\overline{\mathrm{O_1A}}\cos\frac{\theta}{2} = \frac{12}{\sqrt{10}} = \frac{6\sqrt{10}}{5} > \frac{12}{5} \quad \because \cos\frac{\theta}{2} = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

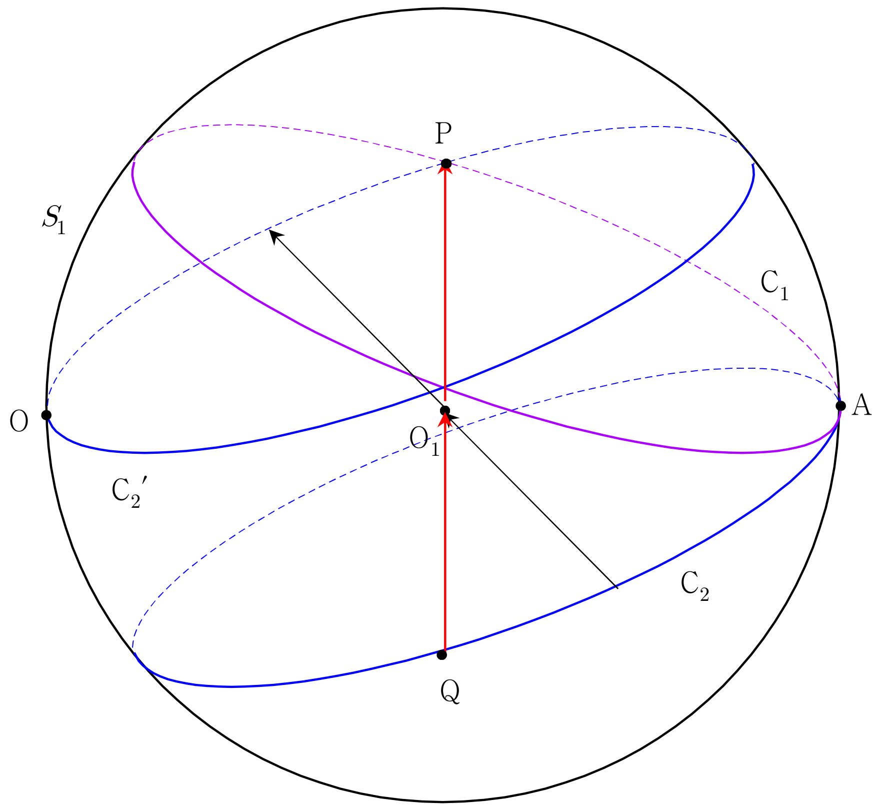
가 됩니다. 그렇지만 이런 식으로 그럴싸한 수치 두 가지 비교한 것만으로는 $\overline{\mathrm{PQ_2}}$가 $|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|$의 최댓값이라는 보장을 할 수 없습니다.

약간 다른 관점에서 접근하자면, 삼각형 $\mathrm{O_1PQ}$에서 다음과 같은 삼각 부등식

$$\overline{\mathrm{PQ}} \leq \overline{\mathrm{O_1P}} + \overline{\mathrm{O_1Q}}$$

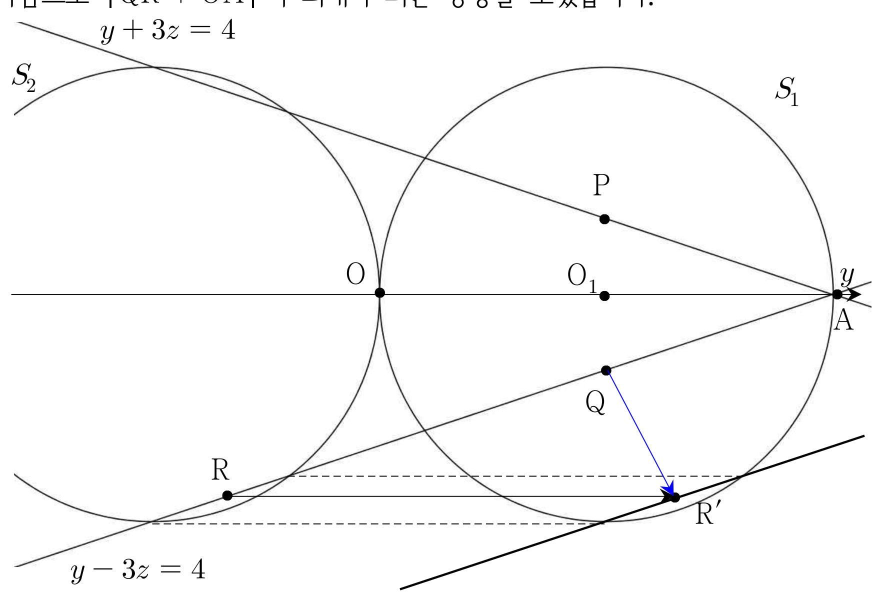
을 생각할 수 있고, 만약 세 점 $\mathrm{P}, \mathrm{O}_1, \mathrm{Q}$가 순서대로 한 직선상에 놓여있다면 $\overline{\mathrm{PQ}}$는 구의 지름 4로서 길이가 최대가 됩니다.

그 경우엔 $\overrightarrow{\mathrm{O_1P}} = \overrightarrow{\mathrm{QO_1}}$가 되는데 시점을 일치시키기 위해 $\overrightarrow{\mathrm{QO_1}}$을 평행이동하여 보겠습니다. 그러면 점 Q가 움직인 자취에 의해 $\overrightarrow{\mathrm{QO_1}}$가 그리는 도형도 여전히 원뿔이 됩니다. 따라서 다음과 같이 세 개의 직원뿔이 겹쳐진 모습을 관찰할 수 있습니다.



구 S_1이 평면 $y+3z=4$와 만나서 생기는 교원을 C_1, 평면 $y-3z=4$와 만나서 생기는 교원을 C_2라 하겠습니다. 그리고 평면 $y-3z=4$를 구 S_1의 중심 O_1에 대하여 대칭시킨 평면은, 법선벡터를 알고, 점 A가 O로 대칭 되므로 $y-3z=0$이 되는데, 이 평면이 구 S_1과 만나서 생기는 교원을 $C_2{}'$이라 하겠습니다. 그러면 두 교원 $C_1, C_2{}'$은 두 교점을 가지며, 그 중 하나를 점 P로 잡으면 됩니다. 이때 $\overrightarrow{O_1P}$를 점 P가 O_1에 오도록 평행이동하면 원 C_2상의 점 Q를 잡아줄 수 있습니다. 이로서 $|\overrightarrow{PQ}|$의 최댓값은 구의 지름으로서 4임을 구하였습니다.

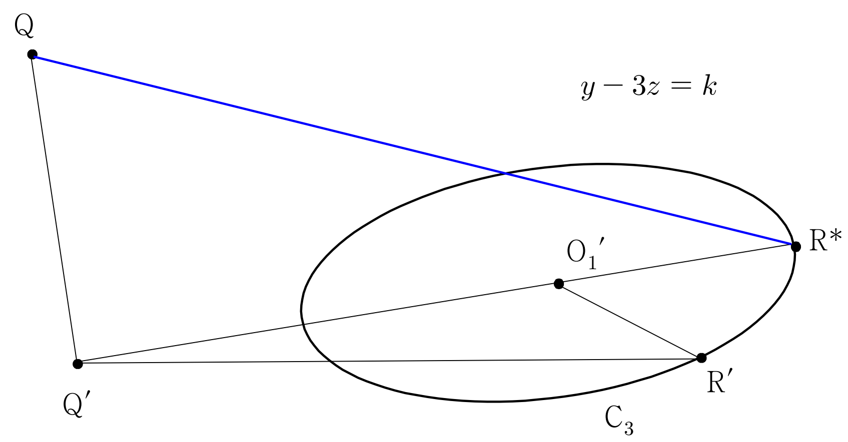
다음으로 $|\overrightarrow{QR}+\overrightarrow{OA}|$가 최대가 되는 상황을 보겠습니다.



마침 두 구 S_1, S_2의 반지름이 2로서 모두 같고, $\overrightarrow{OA}$가 구의 지름과 크기가 같은 벡터입니다. 따라서 평면 $y-3z=4$를 적절하게 평행이동한 평면과 구 S_1에 의해 생기는 교원 위의 점 R'에 대하여 $\overrightarrow{OA}//\overrightarrow{RR'}$이라 할 수 있습니다. 그러면

$$|\overrightarrow{QR}+\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{QR}+\overrightarrow{RR'}|=|\overrightarrow{QR'}|$$

이라 간단히 할 수 있습니다. 이때 점 Q를 꼭짓점으로 하고, 점 R'의 자취를 밑면으로 하는 기울어진 원뿔에 대해서도 피타고라스 정리와 삼각부등식을 이용하여 그 최댓값을 구해보겠습니다.



점 R'이 존재하는 평면을 $y-3z=k$라 하겠습니다. 평면 $y-3z=4$가 점 $(0,-2,-2)$를 지나는 것을 이용해보면 평행이동한 평면 $y-3z=k$는 점 $(0,2,-2)$를 지나야 하기에 $k=8$임을 확정할 수 있습니다. 또, 이 평면이 구 S_1과 만나서 생기는 교원을 C_3라 하고, 그 중심을 $O_1{}'$라 하겠습니다. 그러면 점 $O_1{}'$은 구 S_1의 중심인 점 O_1에서 평면 $y-3z=k$에 내린 수선의 발이기도 합니다. 그리고 점 Q에서 평면 $y-3z=k$에 내린 수선의 발을 Q'이라 하면 피타고라스 정리에 의하여

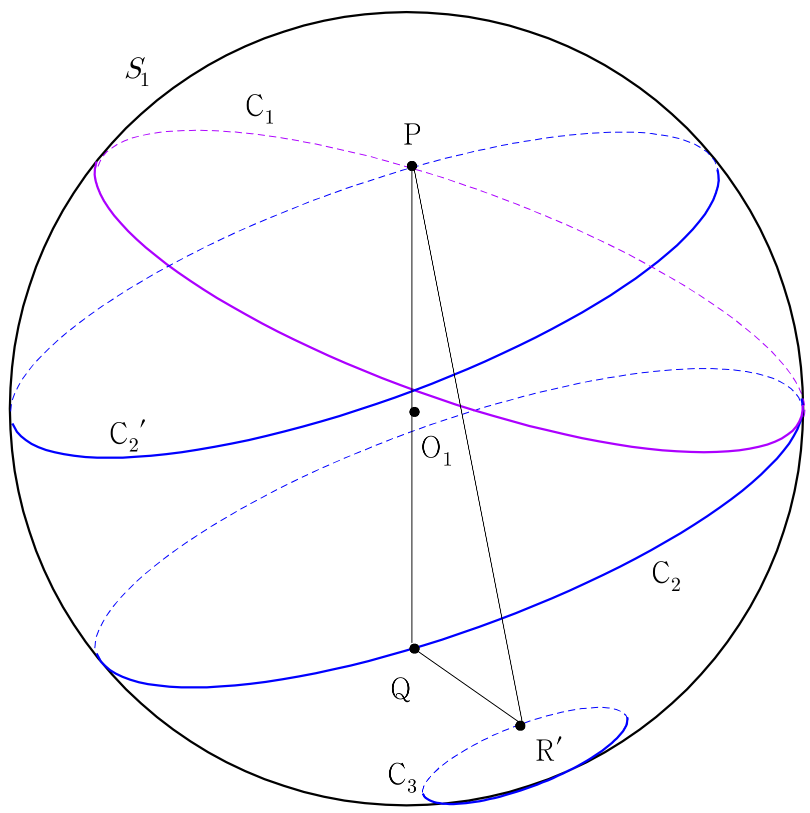
$$\overline{QR'}=\sqrt{\overline{QQ'}^2+\overline{Q'R'}^2}$$

이 성립하는데, 수선의 길이에 해당하는 $\overline{QQ'}$은 상수이므로 결국 $\overline{QR'}$의 최댓값은 $\overline{Q'R'}$이 최대일 때 발생합니다. 이는, 원 밖의 한 점 Q'에서 원 C_3 위의 점 R'에 이르는 거리로서 삼각형 $Q'O_1R'$에서 변의 길이에 대한 삼각부등식을 생각해보면

$$\overline{Q'R'}\le\overline{Q'O_1{}'}+\overline{O_1{}'R'}$$

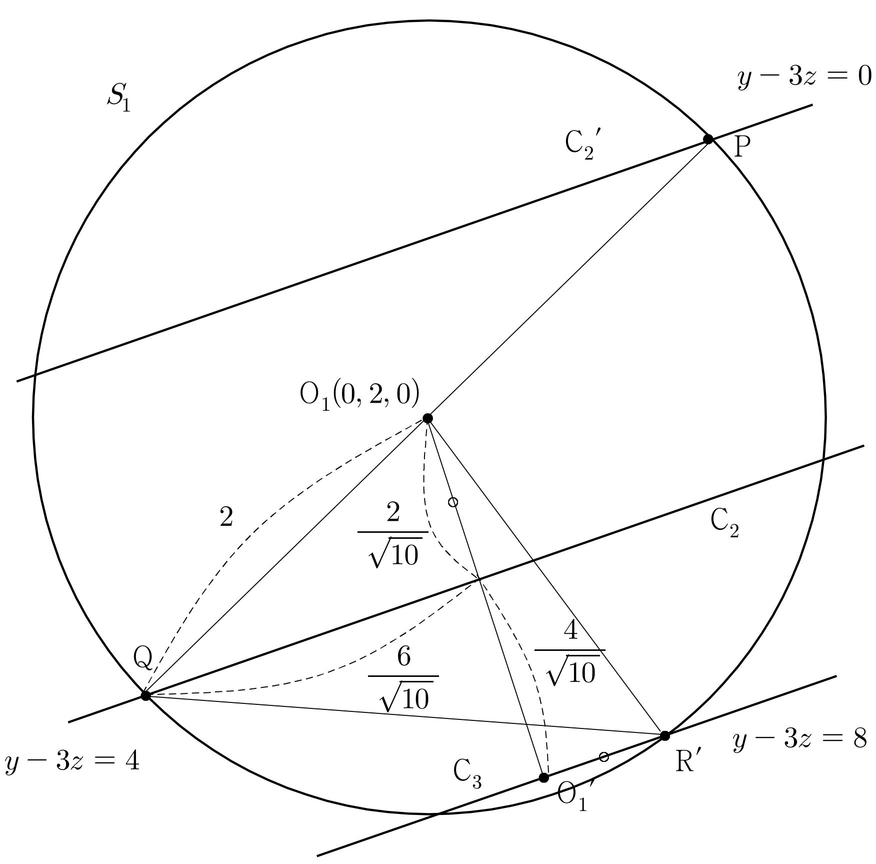
이 성립하고, 최댓값은 세 점 $Q', O_1{}', R'$이 한 직선에 있을 때 발생합니다. 즉, $R'=R^*$이어야 합니다. 이로서 R'의 위치까지 확정되었습니다.

그리고 $\overrightarrow{PR}+\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{PR}+\overrightarrow{RR'}=\overrightarrow{PR'}$이므로 이를 나타내보면 결국 네 점 O_1, P, Q, R'가 한 평면에 존재함을 알 수 있고,



그러면 $\overline{PQ}$가 구 S_1의 지름으로서 원주각의 성질에 의해 $\angle PR'Q=90°$이므로 $\overline{QR'}$을 통해 $\overline{PR'}$을 구할 수 있습니다. 이를 위해 교원 $C_2, C_2{}', C_3$가 선분처럼 보이도록 해서 반지름의 길이를 구할 수 있도록 하는 단면을 생각해봅시다. 이러한 단면은 바로 평면 PQR'입니다.

포만한 수학 연구소

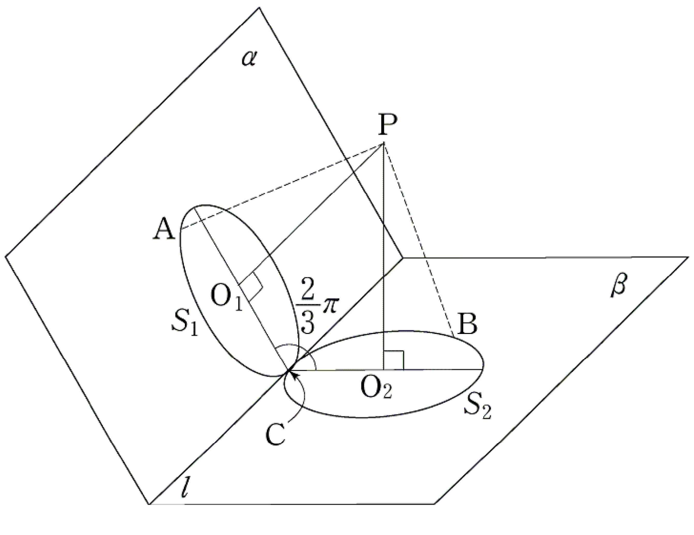


고로, $\overline{QR'}=\sqrt{\left(\frac{4}{\sqrt{10}}\right)^2+\left(\frac{8}{\sqrt{10}}\right)^2}=\frac{4\sqrt{5}}{\sqrt{10}}=2\sqrt{2}$ 가 되므로

$\overline{PR'}^2=|\overrightarrow{PR'}|^2=4^2-(2\sqrt{2})^2=8$이 답이 됩니다.

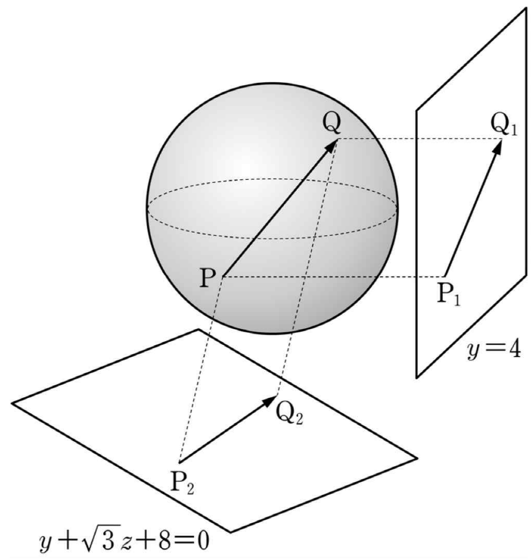
[2005년 09월 평가원 수리(가형) 21번]

21. 두 평면 α, β의 교선을 l이라 하자. 평면 α 위에 있는 원 S_1과 평면 β 위에 있는 원 S_2는 반지름의 길이가 모두 2이다. 그림과 같이 원 S_1과 원 S_2는 점 C에서 직선 l과 접한다. S_1의 중심 O_1을 지나고 평면 α에 수직인 직선과 S_2의 중심 O_2를 지나고 평면 β에 수직인 직선이 만나는 점을 P라 하자. $\angle O_1CO_2=\frac{2}{3}\pi$ 일 때, S_1 위에 있는 임의의 점 A와 S_2 위에 있는 임의의 점 B에 대하여 $|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}|$의 최대값을 M, 최소값을 m이라 하자. $M+m$ 의 값을 구하시오. [4점]



[2013년 11월 대수능 수학 영역(B형) 29번]

29. 좌표공간에서 구 $x^2+y^2+z^2=4$ 위를 움직이는 두 점 P, Q가 있다. 두 점 P, Q에서 평면 $y=4$에 내린 수선의 발을 각각 P_1, Q_1이라 하고, 평면 $y+\sqrt{3}z+8=0$에 내린 수선의 발을 각각 P_2, Q_2라 하자. $2|\overrightarrow{PQ}|^2-|\overrightarrow{P_1Q_1}|^2-|\overrightarrow{P_2Q_2}|^2$의 최댓값을 구하시오. [4점]



30. [뫼비우스 변환]

sol)

$f(f^{-1}(x))=x \to f'(f^{-1}(x))(f^{-1}(x))'=1$ 로부터

$$(f^{-1}(x))'=\frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

임을 유도하고 시작하겠습니다. 그러면 매개변수 미분법과 주어진 조건에 의해

$$\frac{d}{dx}g(x)=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\frac{d}{dt}f^{-1}(t)}{\frac{d}{dt}f(t)}$$

$$=\frac{1}{f'(f^{-1}(t))f'(t)}=\{f^{-1}(t)\}^2$$

즉, $f'(f^{-1}(t))f'(t)\{f^{-1}(t)\}^2=1$이 됩니다.

여기서 $f^{-1}(t)=s$로 치환하면 $t=f(s)$가 성립하며,

$$f'(s)f'(f(s))s^2=1 \to f'(f(s))f'(s)=\frac{1}{s^2}$$

로 고칠 수 있습니다. $s=2$를 대입하면

$$f'(f(2))f'(2)=\frac{1}{4} \to f'(3)f'(2)=\frac{1}{4} \to f'(2)=-1$$

을 얻을 수 있고, $s=3$을 대입하면

$$f'(f(3))f'(3)=\frac{1}{9} \to f'(f(3))=-\frac{4}{9}$$

그리고 (가) 조건에서 $g\left(\frac{5}{2}\right)=2$라 하는 부분은 매개변수를 각각 생각해보면

$\frac{5}{2}=x=f(t)$와 $2=y=f^{-1}(t)$ 를 의미하며,

$$f(2)=f(f^{-1}(t))=t=3,\ f(3)=\frac{5}{2}$$

를 이끌어 낼 수 있습니다. 이는 곧 $f'\left(\frac{5}{2}\right) = -\frac{4}{9}$ 가 됩니다.

마침 묻고 있는 것은 $-27f\left(\frac{5}{2}\right)f'\left(\frac{5}{2}\right)$이므로 $f\left(\frac{5}{2}\right)$를 마저 구해주면 됩니다.

$$f'(f(s))f'(s) = \frac{1}{s^2} \rightarrow f(f(s)) = -\frac{1}{s} + C$$

에서 $f(f(2)) = f(3) = \frac{5}{2} = -\frac{1}{2} + C$로서 $C = 3$이 됩니다. 즉,

$$f(f(s)) = -\frac{1}{s} + 3 = \frac{3s-1}{s}$$

로 $s = 3$을 대입해주면

$$f(f(3)) = f\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{8}{3}$$

따라서, 답은 $-27f\left(\frac{5}{2}\right)f'\left(\frac{5}{2}\right) = -27 \cdot \frac{8}{3} \cdot \left(-\frac{4}{9}\right) = 32$가 됩니다.

※ 위 문제에서 언급하고 있는 모든 조건들을 만족하는 함수로

$$f(t) = \frac{2t-1}{t-1},\ f^{-1}(t) = \frac{t-1}{t-2}$$

를 잡아주면 됩니다. 그리고 $y = g(x) \rightarrow f^{-1}(t) = g(f(t))$에서 $f(t) = k$로 치환하면

$$t = f^{-1}(k),\ f^{-1}(f^{-1}(k)) = g(k) = \frac{1}{-k+3}$$

이 됩니다. 이를 찾기 위해서 유리함수 $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$를 행렬 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$에 대응시키는 뫼비우스 변환을 이용하면 됩니다. 그러면 유리함수 합성이 행렬의 제곱에, 역함수는 역행렬 구하는 것에 대응되기 때문입니다. 뿐만 아니라 함수의 합성과 행렬의 합성, 교환법칙 성립 여부, 역함수와 역행렬 존재여부 등 대수적으로 상당히 유사한 구조를 볼 수 있습니다. 그래서 다음과 같이 둔 후에

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} a^2+bc & (a+d)b \\ (a+d)c & bc+d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

연립방정식을 풀어서 나오는 a, b, c, d로 $f(t) = \frac{at+b}{ct+d}$를 잡아줄 수 있고,

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

에 대응하는 것으로 $f^{-1}(t) = \frac{dt-b}{-ct+a}$를 잡아줄 수 있습니다.

[2011년 11월 대수능 수리(가형) 28번]

28. 함수 $f(x) = 3(x-1)^2 + 5$에 대하여 함수 $F(x)$를 $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$라 하자. 미분가능한 함수 $g(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$F(g(x)) = \frac{1}{2}F(x)$$

를 만족시킨다. $g'(2) = p$일 때, $30p$의 값을 구하시오. [4점]

[2013년 09월 평가원 수학 영역(B형) 30번]

30. 두 연속함수 $f(x)$, $g(x)$가

$$g(e^x) = \begin{cases} f(x) & (0 \le x < 1) \\ g(e^{x-1}) + 5 & (1 \le x \le 2) \end{cases}$$

를 만족시키고, $\int_1^{e^2} g(x)\,dx = 6e^2 + 4$이다. $\int_1^e f(\ln x)\,dx = ae + b$일 때, $a^2 + b^2$의 값을 구하시오. (단, a, b는 정수이다.) [4점]