Solution

E-mail Address

March 9, 2024

Abstract

1 Proof

이 글에서는 연속된 10개의 자연수의 곱이 절대로 완전제곱수가 될 수 없음을 보일 것이다. 즉,

$$\prod_{i=1}^{10}(n+i) = (n+1)(n+2)\cdots(n+10) = k^2$$

을 만족시키는 자연수 n과 k가 존재하지 않음을 보일 것이다. 우선 자연수 n에 대하여 n의 radical을 다음과 같이 정의하자.

Definition of a Radical for $n \in \mathbb{N}$

자연수 n에 대하여 n의 홀수 지수 소인수들의 곱을 n의 radical이라 하고, 이를 $\mathcal{R}(n)$이라 쓰자. 즉, $\mathcal{R}(n)$은 n에서 완전제곱수의 요소들을 모두 제거한 것이다. 예를 들면 $\mathcal{R}(3) = 3$, $\mathcal{R}(24) = 6$, $\mathcal{R}(27) = 3$ 이다. n의 완전제곱수 요소는 이들의 곱이 완전제곱수가 되는 데에 영향을 미치지 못하므로, 이를 제외하고 생각하자는 발상에서 비롯되었다.

이제 자연수 N을 다음과 같이 정의하자.

$$N = \prod_{i=1}^{10}\mathcal{R}(n+i)$$

즉, N은 연속된 10개의 자연수 각각의 radical들의 곱이다. radical이 아닌 요소는 모두 완전제곱수이므로, 문제는 위와 같이 정의된 자연수 N이 완전제곱수가 될 수 없음을 보이는 것과 동치가 된다.

한편 11 이상의 소인수 p에 대하여 연속된 자연수 10개 중 p의 배수는 많아야 1개이고, 만약 N이 완전제곱수가 되는 경우가 존재하는 경우 N은 p를 짝수 개 가지고 있어야 하므로 결과적으로 N은 p의 배수가 될 수 없다는 결론을 얻는다. 즉, N이 가질 수 있는 소인수는 $2, 3, 5, 7$이 전부이다.

이제 N이 최대로 가질 수 있는 2의 개수를 구해보자. 연속된 10개의 자연수 중 짝수는 5개로 고정되어 있으므로 각각의 $\mathcal{R}(n+i)$이 모두 2를 소인수로 가진다고 하더라도 5개가 최대이다. 하지만 N 역시 완전제곱수가 되어야 하므로 N이 가질 수 있는 2는 최대 4개이다. (5개가 될 수 없음을 직접 보이는 방법도 있다.)

3의 경우, 10개의 연속된 자연수 중 3의 배수는 최대 4개 (예시 : $3, 4, 5, \cdots, 12$)이므로 N이 가질 수 있는 3은 최대 4개이고, 실제 예시는 $21, 22, 23, \cdots, 30$이다. (첫 번째 예시의 경우 $\mathcal{R}(9) = 1$이므로 4개가 아니다.)

5의 경우, 10개의 연속된 자연수 중 5의 배수는 최대 2개이므로 N이 가질 수 있는 5는 최대 2개이다. (예시 : $1, 2, 3, \cdots, 10$)

마지막으로 7의 경우, 10개의 연속된 자연수 중 7의 배수는 최대 2개이므로 N이 가질 수 있는 7은 최대 2개이다. (예시 : $7, 8, 9, \cdots, 16$)

따라서 N은 $2^4 3^4 5^2 7^2$의 약수가 되어야 하고, 약수와 배수의 관계에 따라 다음이 성립한다.

$$N \le 2^4 3^4 5^2 7^2 \tag{1}$$

한편 radical로 가능한 값들을 작은 것부터 나열하면

$$1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 13, \cdots$$

과 같이 완전제곱수가 아닌 수들에 1이 추가된 형태이므로, 만약 $n+i$들의 각각의 radical들이 모두 다르다면 이 radical들의 곱인 N에 대하여 다음 부등식이 성립해야 한다.

$$\begin{aligned} N &\ge 1 \times 2 \times 3 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 10 \times 11 \times 12 \\ &= 2^8 3^3 5^2 7 \cdot 11 \end{aligned} \tag{2}$$

하지만

$$\frac{2^8 3^3 5^2 7 \cdot 11}{2^4 3^4 5^2 7^2} = \frac{2^4 \times 11}{21} = \frac{176}{21} > 1 \tag{3}$$

이므로 식 (1)과 식 (2)는 서로 모순된다. 따라서 연속한 10개의 자연수 중 두 자연수 a, b $(a < b)$가 존재하여 $\mathcal{R}(a) = \mathcal{R}(b)$가 성립해야 한다.

$\mathcal{R}(a) = \mathcal{R}(b) = r$이라 하면 자연수 x, y가 존재하여 다음이 성립한다.

$$\begin{cases} a = rx^2 \\ b = ry^2 \end{cases}, \quad x < y$$

이때 a와 b는 연속한 10개의 자연수 안에 속해있으므로

$$b - a = r(y^2 - x^2) \le 9$$

가 성립하고, $y^2 - x^2$의 최솟값은 $2^2 - 1^2 = 3$이므로 $r \le 3$임을 알 수 있다.

먼저 $r = 3$인 경우, $x = 1$, $y = 2$로 값이 정해지므로 이는 3부터 12까지 곱한 경우이지만, 7과 11을 각각 한 개씩 가지고 있으므로 완전제곱수가 될 수 없다.

$r = 2$인 경우 $y^2 - x^2 \le 4$인 (x, y)의 순서쌍은 $(x, y) = (1, 2)$뿐이고, 이는 2와 8이 포함된 연속된 자연수 10개의 곱이다. 하지만 이 경우 역시 7을 두 개 포함할 수 없어 모순이 발생한다.

마지막으로 $r = 1$인 경우 $y^2 - x^2 \le 9$인 (x, y)의 순서쌍은 $(x, y) = (1, 2), (1, 3), (2, 3), (3, 4), (4, 5)$이지만, 각 경우 모두 불가능함을 확인해볼 수 있다.

또는, n의 최솟값을 확인하여 직접 계산 없이 위 순서쌍에서 증명을 바로 끝낼 수도 있다. 연속한 10개의 자연수 중 11의 배수는 많아야 1개이므로, 이들의 곱이 완전제곱수가 되기 위해서는 모두 11의 배수이거나, 그 중 하나가 121과 같이 11을 짝수 개 가지고 있어야 한다. 연속한 10개의 자연수가 모두 121보다 작은 경우 이들이 모두 11의 배수가 아닐 때에만 완전제곱수가 될 가능성이 있지만, 11의 배수들 사이를 확인해보면 $7, 13, 17, 19$ 등의 배수들이 항상 들어가 있어 121보다 작은 상황에서는 불가능하다는 것을 알 수 있다. 즉, $r = 1, 2, 3$인 경우의 모든 케이스는 100보다 작은 상황이므로 근본적으로 불가능한 해라는 것을 알 수 있다.

따라서 연속한 10개의 자연수 중 그 radical이 같은 것이 있는 경우에도 모순, 없는 경우에도 모순이 발생하므로 귀류법에 의해 증명이 완료되었다. ■