제 2 교시

수학 영역

5지선다형

1. $\sqrt[3]{54}\times 2^{\frac{5}{3}}$ 의 값은? [2점]

① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

$\sqrt[3]{54}\times 2^{\frac{5}{3}} = 3\times 2^{\frac{1}{3}}\times 2^{\frac{5}{3}}$

$=12$

2. 함수 $f(x)=x^3-3x^2+x$ 에 대하여 $\lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{2h}$ 의 값은? [2점]

$=\frac{f'(3)}{2}$

① 1 ② 3 ③ 5 ④ 7 ⑤ 9

$f'(x)=3x^2-6x+1$

$f'(3)=10$

$\therefore \frac{f'(3)}{2}=5$

3. $\cos\theta>0$ 이고 $\sin\theta+\cos\theta\tan\theta=-1$ 일 때, $\tan\theta$ 의 값은? [3점]

① $-\sqrt{3}$ ② $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ ③ $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ④ 1 ⑤ $\sqrt{3}$

$\sin\theta+\cos\theta\tan\theta = \sin\theta+\cos\theta\cdot\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = 2\sin\theta=-1$

$\Rightarrow \sin\theta=-\frac{1}{2}$

$\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\tan\theta=-\frac{1}{\sqrt{3}}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$

4. 함수

$$f(x)=\begin{cases}2x+a & (x<3)\\ \sqrt{x+1}-a & (x\geq 3)\end{cases}$$

이 $x=3$ 에서 연속일 때, 상수 a 의 값은? [3점]

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

$\lim_{x\to 3-}f(x)=\lim_{x\to 3+}f(x)=f(3)$

$\Rightarrow 6+a=2-a$ $\therefore a=-2$

5. 다항함수 $f(x)$가

$$f'(x)=x(3x+2),\quad f(1)=6$$

을 만족시킬 때, $f(0)$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$f'(x)=3x^2+2x \Rightarrow f(x)=x^3+x^2+C$

$f(1)=2+C=6 \Rightarrow C=4$

$\therefore f(0)=C=4$

6. 공비가 1보다 큰 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자.

$$\frac{S_4}{S_2}=5,\quad a_5=48$$

일 때, a_1+a_4의 값은? [3점]

① 39 ② 36 ③ 33 ④ 30 ⑤ 27

$$\frac{S_4}{S_2}=\frac{\frac{a(r^4-1)}{r-1}}{\frac{a(r^2-1)}{r-1}}=r^2+1=5 \Rightarrow r=2$$

$a_5=a\cdot 16=48 \Rightarrow a=3$

$\therefore a_1+a_4=3+24=27$

7. 함수 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-2x^2-5x+1$이 닫힌구간 $[a, b]$에서 감소할 때, $b-a$의 최댓값은? (단, a, b는 $a<b$인 실수이다.) [3점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

$f'(x)=x^2-4x-5=(x-5)(x+1)$

닫힌구간 $[-1, 5]$ 에서 감소

$b-a$ 최대 $=6$

8. 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여

$$(x+1)f(x)+(1-x)g(x)=x^3+9x+1,\quad f(0)=4$$

일 때, $f'(0)+g'(0)$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$x=0$ 대입 $f(0)+g(0)=1$, $f(0)=4$ 이므로 $g(0)=-3$

양변 미분 $f(x)+(x+1)f'(x)-g(x)+(1-x)g'(x)=3x^2+9$ …㉠

㉠에 $x=0$ 대입 $f(0)+f'(0)-g(0)+g'(0)=9$

$\therefore f'(0)+g'(0)=2$

9. 좌표평면 위의 두 점 $(0,\ 0)$, $(\log_2 9,\ k)$를 지나는 직선이 직선 $(\log_4 3)x+(\log_9 8)y-2=0$에 수직일 때, 3^k의 값은? (단, k는 상수이다.) [4점]

① 16 ② 32 ③ 64 ④ 128 ⑤ 256

기울기 : $\dfrac{k}{\log_2 9}$

기울기 : $-\dfrac{\log_4 3}{\log_9 8}=-\dfrac{\log_2 3}{3\log_3 2}$

수직 : $\dfrac{k}{2\log_2 3}\times-\dfrac{\log_2 3}{3\log_3 2}=-1 \Rightarrow k=6\log_3 2$

$\therefore 3^k=2^6=64$

10. 시각 $t=0$일 때 동시에 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 $t\,(t\geq 0)$에서의 속도가 각각

$$v_1(t)=3t^2-6t-2,\quad v_2(t)=-2t+6$$

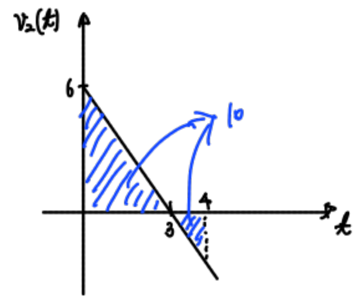
이다. 출발한 시각부터 두 점 P, Q가 다시 만날 때까지 점 Q가 움직인 거리는? [4점]

① 7 ② 8 ③ 9 ④ 10 ⑤ 11

$x_1(t)=t^3-3t^2-2t$, $x_2(t)=-t^2+6t$

$x_1(t)=x_2(t) \Leftrightarrow t^3-2t^2-8t=0 \Leftrightarrow t(t-4)(t+2)=0$

$t=4$에서 다시 만남.



OR $\int_0^4 |v_2(t)|\,dt=10$

11. 공차가 음의 정수인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_6 = -2, \quad \sum_{k=1}^{8} |a_k| = \sum_{k=1}^{8} a_k + 42$$

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{8} a_k - \sum_{k=1}^{8} |a_k| = -42$

일 때, $\sum_{k=1}^{8} a_k$의 값은? [4점]

① 40 ② 44 ③ 48 ④ 52 ⑤ 56

i) $d=-1$, a_5부터 음수

$\sum_{k=1}^{8} a_k - \sum_{k=1}^{8} |a_k| = 2(a_5+a_6+a_7+a_8) = -20 \neq -42$ (모순)

ii) $d \le -2$, a_6부터 음수

$\sum_{k=1}^{8} a_k - \sum_{k=1}^{8} |a_k| = 2(a_6+a_7+a_8) = -12+6d = -42$

$\therefore d=-5$

$\Rightarrow a_3 = 13$ 이므로

$\sum_{k=1}^{8} a_k = \dfrac{8(a_3+a_6)}{2} = 44$

12. 실수 a에 대하여 함수 $f(x)$는

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2+3x+a & (x<0) \\ 3x+a & (x \ge 0) \end{cases}$$

이다. 함수

$$g(x) = \int_{-4}^{x} f(t)\,dt$$

가 $x=2$에서 극솟값을 가질 때, 함수 $g(x)$의 극댓값은? [4점]

① 18 ② 20 ③ 22 ④ 24 ⑤ 26

$g'(x) = f(x) \Rightarrow g'(2) = 6+a = 0 \Rightarrow a=-6$

$f(x) = \begin{cases} 3x^2+3x-6 & (x<0) \\ 3x-6 & \end{cases}$

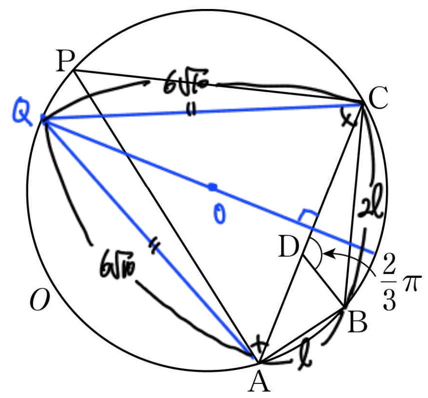
$(x<0)$ 에서 $3(x+2)(x-1)$ 이므로 $x=-2$ 에서 극대

$g(-2) = \int_{-4}^{-2} (3t^2+3t-6)\,dt = \left[t^3 + \frac{3}{2}t^2 - 6t\right]_{-4}^{-2} = 26$

13. 그림과 같이

$$2\overline{AB}=\overline{BC},\quad \cos(\angle ABC)=-\frac{5}{8}$$

인 삼각형 ABC의 외접원을 O라 하자. 원 O 위의 점 P에 대하여 삼각형 PAC의 넓이가 최대가 되도록 하는 점 P를 Q라 할 때, $\overline{QA}=6\sqrt{10}$이다. 선분 AC 위의 점 D에 대하여 $\angle CDB=\frac{2}{3}\pi$일 때, 삼각형 CDB의 외접원의 반지름의 길이는? [4점]



① $3\sqrt{3}$ ② $4\sqrt{3}$ ③ $3\sqrt{6}$ ④ $5\sqrt{3}$ ⑤ $4\sqrt{6}$

$\cos(\angle CQA) = -\cos(\angle ABC) = \frac{5}{8}$

Cosine Law $\triangle CQA$

$\Rightarrow \overline{AC}^2 = (6\sqrt{10})^2 + (6\sqrt{10})^2 - 2(6\sqrt{10})^2 \cdot \frac{5}{8} = 270$

Cosine Law $\triangle ABC$

$\Rightarrow 270 = l^2 + 4l^2 + 2 \cdot 2l^2 \cdot \frac{5}{8} \Rightarrow l = 6$

$(\triangle CDB$ 의 반지름의 길이$) = \dfrac{\overline{CB}}{2\sin\frac{2}{3}\pi} = 4\sqrt{3}$

14. 두 정수 a, b에 대하여 함수 $f(x)$는

$$f(x)=\begin{cases} x^2-2ax+\dfrac{a^2}{4}+b^2 & (x\le 0) \\ x^3-3x^2+5 & (x>0) \end{cases}$$

이다. 실수 t에 대하여 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=t$가 만나는 점의 개수를 $g(t)$라 하자. 함수 $g(t)$가 $t=k$에서 불연속인 실수 k의 개수가 2가 되도록 하는 두 정수 a, b의 모든 순서쌍 (a, b)의 개수는? [4점]

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

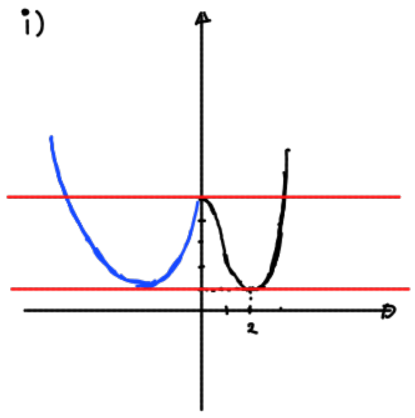
$x>0$ 에서 $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$

$f(0)=5,\ f(2)=1$

$x\le 0$ 에서 $f(x) = (x-a)^2 - \frac{3}{4}a^2 + b^2$

$f(0)=\frac{a^2}{4}+b^2$, 대칭축 : a, 극솟값 : $-\frac{3}{4}a^2+b^2$

i)

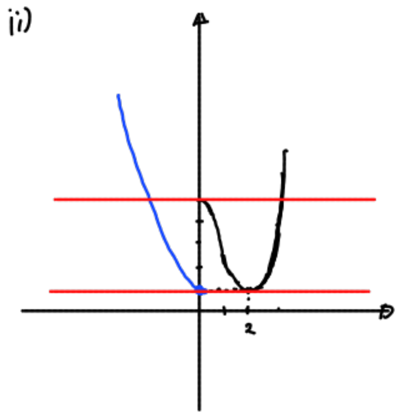


$a<0$, $\frac{a^2}{4}+b^2=5$, $-\frac{3}{4}a^2+b^2=1$

$a^2=4,\ b^2=4$

$(a,b) = (2,2), (2,-2)$

ii)



$a\ge 0$, $\frac{a^2}{4}+b^2=1$

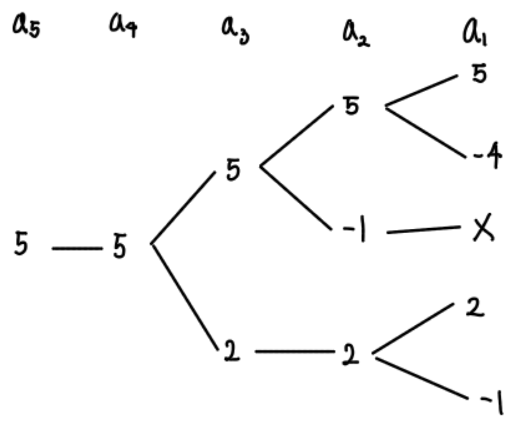
$(a,b) = (2,0), (0,1), (0,-1)$

15. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} a_n & (a_n > n) \\ 3n-2-a_n & (a_n \le n) \end{cases}$$

을 만족시킬 때, $a_5 = 5$가 되도록 하는 모든 a_1의 값의 곱은? [4점]

① 20 ② 30 ③ 40 ④ 50 ⑤ 60



$\Rightarrow 5 \times (-4) \times (2) \times (-1) = 40$

단답형

16. 방정식 $4^x = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-9}$을 만족시키는 실수 x의 값을 구하시오. [3점]

$2^{2x} = 2^{9-x} \Rightarrow 2x = 9-x$

3

$\therefore x = 3$

17. $\int_0^2 (3x^2-2x+3)\,dx - \int_2^0 (2x+1)\,dx$의 값을 구하시오. [3점]

16

$\int_0^2 (3x^2-2x+3)dx + \int_0^2 (2x+1)dx = \int_0^2 (3x^2+4)dx$

$= [x^3+4x]_0^2$

$= 16$

18. 수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\sum_{k=1}^{10} a_k + \sum_{k=1}^{9} a_k = 137,\ \sum_{k=1}^{10} a_k - \sum_{k=1}^{9} 2a_k = 101$$

일 때, a_{10}의 값을 구하시오. [3점]

113

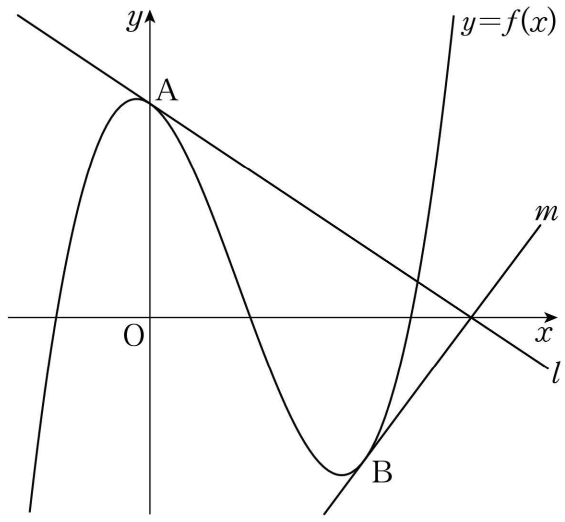
Let $\sum_{k=1}^{10} a_k = \alpha$, $\sum_{k=1}^{9} a_k = \beta$, then $\alpha+\beta=137$, $\alpha-2\beta=101$

$\Rightarrow \alpha=125$, $\beta=12$

$a_{10} = \sum_{k=1}^{10} a_k - \sum_{k=1}^{9} a_k = \alpha-\beta = 113$

19. 실수 a에 대하여 함수 $f(x)=x^3-\frac{5}{2}x^2+ax+2$이다. 곡선 $y=f(x)$ 위의 두 점 $\mathrm{A}(0,\ 2)$, $\mathrm{B}(2,\ f(2))$에서의 접선을 각각 l, m이라 하자. 두 직선 l, m이 만나는 점이 x축 위에 있을 때, $60\times|f(2)|$의 값을 구하시오. [3점]

80



$f'(x)=3x^2-5x+a \Rightarrow f'(0)=a,\ f'(2)=2+a$

$l: y=ax+2,\ m: y=(2+a)x-4$

l의 x절편 : $-\frac{2}{a}$. m의 x절편 : $\frac{4}{2+a} \Rightarrow -\frac{2}{a}=\frac{4}{2+a}$ $\therefore a=-\frac{2}{3}$

$60\times|f(2)| = 60\times\left|-\frac{4}{3}\right| = 80$

20. 두 함수 $f(x)=2x^2+2x-1$, $g(x)=\cos\frac{\pi}{3}x$에 대하여 $0\le x<12$에서 방정식

$$f(g(x))=g(x)$$

를 만족시키는 모든 실수 x의 값의 합을 구하시오. [4점]

36

$g(x)=t$라 하면, $f(t)=t$에서 $2t^2+2t-1=0 \Leftrightarrow (2t-1)(t+1)=0$

$\Rightarrow t=\frac{1}{2}$ or -1

$g(x)=-1$을 만족시키는 x의 값 : 3, 9

$g(x)=\frac{1}{2}$을 만족시키는 x의 값의 합 : $3\times2+9\times2$ (대칭성)

$\therefore 3+9+6+18=36$

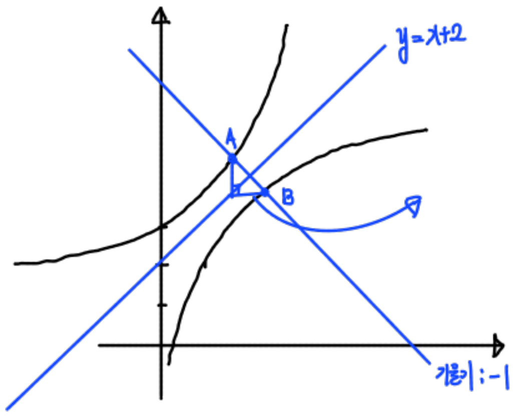
21. $a>2$인 실수 a에 대하여 기울기가 -1인 직선이 두 곡선

$$y=a^x+2,\quad y=\log_a x+2$$

와 만나는 점을 각각 A, B라 하자. 선분 AB를 지름으로 하는 원의 중심의 y좌표가 $\frac{19}{2}$이고 넓이가 $\frac{121}{2}\pi$일 때, a^2의 값을 구하시오. [4점]

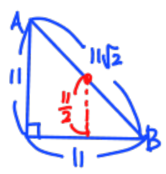
13

$r=\frac{11\sqrt{2}}{2}$



원의 중심 $(k, \frac{19}{2}) \Rightarrow y=x+2$ 위에 $\therefore k=\frac{15}{2}$

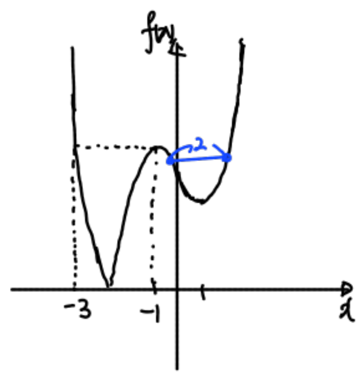
$A(2, 15) \Rightarrow y=a^x+2$에 대입 $\therefore a^2=13$



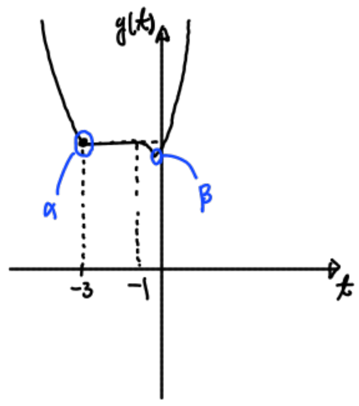
22. 함수 $f(x)=|x^3-3x+8|$과 실수 t에 대하여 닫힌구간 $[t, t+2]$에서의 $f(x)$의 최댓값을 $g(t)$라 하자. 서로 다른 두 실수 α, β에 대하여 함수 $g(t)$는 $t=\alpha$와 $t=\beta$에서만 미분가능하지 않다. $\alpha\beta=m+n\sqrt{6}$일 때, $m+n$의 값을 구하시오. (단, m, n은 정수이다.) [4점]

2

$h(x)=x^3-3x+8 \Rightarrow h'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1) \Rightarrow h(1)=6,\ h(-1)=10,\ h(-3)=-10$



$\Rightarrow$



$\Rightarrow f(\beta)=f(\beta+2)$

$\beta^3-3\beta+8=(\beta+2)^2-3(\beta+2)+8$

$=\beta^3+6\beta^2+12\beta+8-3\beta-6+8$

$\Rightarrow 3\beta^2+6\beta+1=0$

$\beta=-1+\frac{\sqrt{6}}{3}\ (\because \beta>-1)$

$\alpha\beta=3-\sqrt{6}$에서 $m=8,\ n=-1$ $\therefore m+n=2$

* 확인 사항
- ○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
- ○ 이어서, 「선택과목(확률과 통계)」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(확률과 통계)

5지선다형

23. ${}_{3}\mathrm{H}_{3}$의 값은? [2점]

① 10 ② 12 ③ 14 ④ 16 ⑤ 18

${}_{3}H_{3} = {}_{5}C_{3} = 10$

24. 숫자 1, 2, 3 중에서 중복을 허락하여 4개를 택해 일렬로 나열하여 만들 수 있는 네 자리 자연수 중 홀수의 개수는? [3점]

① 30 ② 36 ③ 42 ④ 48 ⑤ 54

$\underbrace{3}_{(1,2,3)} \times \underbrace{3}_{(1,2,3)} \times \underbrace{3}_{(1,2,3)} \times \underbrace{2}_{(1,3)} = 54$

or

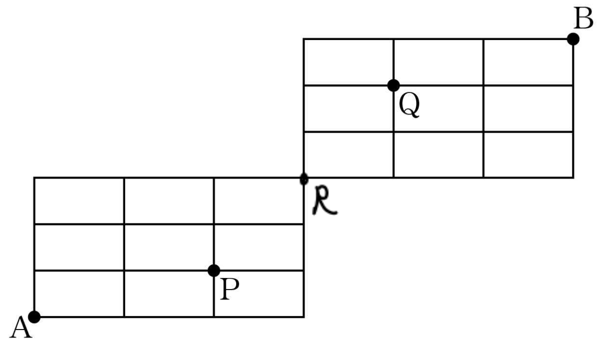
${}_{3}\Pi_{4} - {}_{3}\Pi_{3} = 54$

25. 남학생 5명, 여학생 2명이 있다. 이 7명의 학생이 일정한 간격을 두고 원 모양의 탁자에 모두 둘러앉을 때, 여학생끼리 이웃하여 앉는 경우의 수는?
(단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) [3점]

① 200 ② 240 ③ 280 ④ 320 ⑤ 360

$\underbrace{5!}_{\text{원순열}} \times \underbrace{2}_{\text{여학생 이웃}} = 240$

26. 그림과 같이 직사각형 모양으로 연결된 도로망이 있다. 이 도로망을 따라 A 지점에서 출발하여 B 지점까지 최단거리로 갈 때, P 지점을 지나면서 Q 지점을 지나지 않는 경우의 수는? [3점]



① 72 ② 81 ③ 90 ④ 99 ⑤ 108

1) A→P→Q

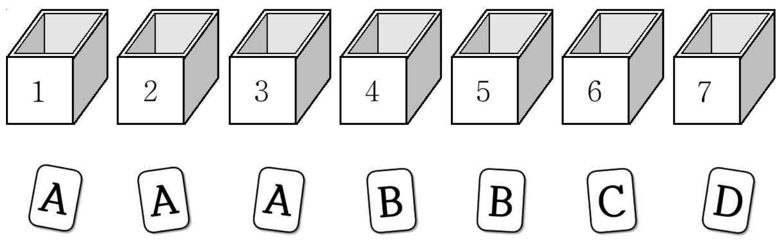
$\frac{3!}{2!} \times \frac{3!}{2!} = 9$

2) (R→B) − (R→Q→B)

$\frac{6!}{3! \times 3!} - \frac{3!}{2!} \times \frac{3!}{2!} = 20 - 9 = 11$

$\therefore 9 \times 11 = 99$

27. 그림과 같이 문자 A, A, A, B, B, C, D가 각각 하나씩 적혀 있는 7장의 카드와 1부터 7까지의 자연수가 각각 하나씩 적혀 있는 7개의 빈 상자가 있다.



각 상자에 한 장의 카드만 들어가도록 7장의 카드를 나누어 넣을 때, 문자 A가 적혀 있는 카드가 들어간 3개의 상자에 적힌 수의 합이 홀수가 되도록 나누어 넣는 경우의 수는? (단, 같은 문자가 적힌 카드끼리는 서로 구별하지 않는다.) [3점]

① 144 ② 168 ③ 192 ④ 216 ⑤ 240

i) A가 홀수 상자 3개

$_4C_3$

ii) A가 홀수 1개, 짝수 2개

$_4C_1 \times {}_3C_2$

⇒ 나머지 배치 $\frac{4!}{2!}$

∴ $({}_4C_3 + {}_4C_1 \times {}_3C_2) \times \frac{4!}{2!} = 192$

28. 다음 조건을 만족시키는 자연수 a, b, c의 모든 순서쌍 (a, b, c)의 개수는? [4점]

> (가) $ab^2c = 720$
> (나) a와 c는 서로소가 아니다.

① 38 ② 42 ③ 46 ④ 50 ⑤ 54

$720 = 2^4 \times 3^2 \times 5$

i) $b=1$

전체 : $5 \times 3 \times 2 = 30$ (약수의 개수)

(나)의 여사건 : a와 c가 서로소

${}_2\Pi_3 = 8$

$\Rightarrow 30-8=22$

ii) $b=2$

전체 : $3 \times 3 \times 2 = 18$

(나)의 여사건 : ${}_2\Pi_3 = 8$

$\Rightarrow 18-8=10$

iii) $b=2^2$

전체 : $3 \times 2 = 6$

(나)의 여사건 : ${}_2\Pi_2 = 4$

$\Rightarrow 6-4=2$

iv) $b=3$

전체 : $5 \times 2 = 10$

(나)의 여사건 : ${}_2\Pi_2 = 4$

$\Rightarrow 10-4=6$

v) $b=2 \times 3$

전체 : $3 \times 2 = 6$

(나)의 여사건 : ${}_2\Pi_2 = 4$

$\Rightarrow 6-4=2$

vi) $b=2^2 \times 3$

전체 : X

(나)의 여사건 : X

∴ $22+10+2+6+2=42$

단답형

29. 세 명의 학생에게 서로 다른 종류의 초콜릿 3개와 같은 종류의 사탕 5개를 다음 규칙에 따라 남김없이 나누어 주는 경우의 수를 구하시오.
(단, 사탕을 받지 못하는 학생이 있을 수 있다.) [4점] 117

(가) 적어도 한 명의 학생은 초콜릿을 받지 못한다.
(나) 각 학생이 받는 초콜릿의 개수와 사탕의 개수의 합은 2 이상이다.

i) 초콜릿 한명이 못받는 경우

⇒ (초콜릿 못받는 한명 $_3C_1$) × (나머지 두명에게 나눠줌 $_3C_2 \times 2$) = 18

초초 초사 사사 ⇒ 남은 사탕 2개 $_3H_2 = 6$

∴ 18×6 = 108

ii) 초콜릿 두명이 못받는 경우

⇒ (초콜릿 못받는 두명 $_3C_2$) = 3

초초초 사사 사사 ⇒ 남은 사탕 1개 $_3H_1 = 3$

∴ 3×3=9

∴ 108 + 9 = 117

30. 집합 $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f : X \to X$의 개수를 구하시오. [4점] 90

(가) $f(1) \le f(2) \le f(3)$
(나) $1 < f(5) < f(4)$
(다) $f(a) = b,\ f(b) = a$를 만족시키는 집합 X의 서로 다른 두 원소 $a,\ b$가 존재한다.

a, b가 모두 1,2,3 중에 있다면 (가)에 모순
ex) $f(1)=3,\ f(3)=1 \Rightarrow f(1) > f(3)$

i) a=1 일 때
b=4 이면, $f(4)=1$ 이므로 (나)에 모순
b=5 이면, $f(5)=1$ 〃

ii) a=2 일 때
b=4 이면, $f(4)=2,\ f(5)=1$ 이므로 (나)에 모순
b=5 이면, $f(5)=2,\ f(4)=3,4,5 \Rightarrow 5\times1\times3 = 15$

iii) a=3 일 때
b=4 이면, $f(4)=3,\ f(5)=2 \Rightarrow {}_4H_2 = 10$
b=5 이면, $f(5)=3,\ f(4)=4,5 \Rightarrow {}_5H_2 \times 2 = 30$

iv) a=4 일 때
b=1,2,3은 i), ii), iii)과 같은 상황
b=5 이면, $f(4)=5,\ f(5)=4 \Rightarrow {}_5H_3 = 35$

∴ 15+10+30+35 = 90

* 확인 사항
○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
○ 이어서, 「선택과목(미적분)」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(미적분)

5지선다형

23. $\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}+3^{n-1}}{2^n-3^n}$ 의 값은? [2점]

① $-\frac{1}{3}$ ② $-\frac{1}{6}$ ③ 0 ④ $\frac{1}{6}$ ⑤ $\frac{1}{3}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n+\frac{1}{3}}{\left(\frac{2}{3}\right)^n-1}=-\frac{1}{3}$$

24. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이

$$\lim_{n\to\infty}na_n=1,\quad \lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{n}=3$$

을 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2a_n+b_n}{1+2b_n}$ 의 값은? [3점]

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{2}{3}$ ④ $\frac{5}{6}$ ⑤ 1

$$\lim_{n\to\infty}\frac{na_n+\frac{b_n}{n}}{\frac{1}{n}+2\cdot\frac{b_n}{n}}=\frac{1+3}{0+6}=\frac{2}{3}$$

25. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$2n+3 < a_n < 2n+4$$

를 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{(a_n+1)^2+6n^2}{na_n}$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$2+\frac{3}{n} < \frac{a_n}{n} < 2+\frac{4}{n} \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n} = 2$ (샌드위치)

$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{a_n}{n}\right)^2+2\cdot\frac{a_n}{n^2}+\frac{1}{n^2}+6}{\frac{a_n}{n}} = \frac{4+0+0+6}{2} = 5$

26. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}-a_n = \underbrace{a_1+2}_{\text{상수}} \Rightarrow \{a_n\} : \text{등차수열}$$

를 만족시킨다. $\lim_{n\to\infty}\frac{2a_n+n}{a_n-n+1}=3$일 때, a_{10}의 값은? (단, $a_1>0$) [3점]

① 35 ② 36 ③ 37 ④ 38 ⑤ 39

$a_n = a_1+(n-1)(a_1+2) = (a_1+2)n-2$

$\lim_{n\to\infty}\frac{(2a_1+5)n-4}{(a_1+1)n-1} = \frac{2a_1+5}{a_1+1} = 3 \Rightarrow a_1 = 2$

$\therefore a_{10} = 38$

27. $a_1 = 3$, $a_2 = 6$ 인 등차수열 $\{a_n\}$과 모든 항이 양수인 수열 $\{b_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n} a_k (b_k)^2 = n^3 - n + 3$$

을 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n b_{2n}}$ 의 값은? [3점]

① $\frac{3}{2}$ ② $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ ③ 3 ④ $3\sqrt{2}$ ⑤ 6

$a_n = 3n$

$n=1$ 에서 $a_1 \cdot (b_1)^2 = 3 \Rightarrow b_1 = 1$ $(\because b_n > 0)$

$n \geq 2$ 에서 $a_n(b_n)^2 = \sum_{k=1}^{n} a_k(b_k)^2 - \sum_{k=1}^{n-1} a_k(b_k)^2 = 3n(n-1) \Rightarrow b_n = \sqrt{n-1}$

$\lim_{n\to\infty} \frac{3n}{\sqrt{n-1} \cdot \sqrt{2n-1}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

28. 자연수 n에 대하여 직선 $y = 2nx$가 곡선 $y = x^2 + n^2 - 1$과 만나는 두 점을 각각 A_n, B_n이라 하자. 원 $(x-2)^2 + y^2 = 1$ 위의 점 P에 대하여 삼각형 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{P}$의 넓이가 최대가 되도록 하는 점 P를 P_n이라 할 때, 삼각형 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{P}_n$의 넓이를 S_n이라 하자. $\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n}$ 의 값은? [4점]

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

$2nx = x^2 + n^2 - 1 \Leftrightarrow (x-n-1)(x-n+1) = 0$

$\Rightarrow A_n(n+1, 2n^2+2n)$, $B_n(n-1, 2n^2-2n)$

넓이 최대 → 높이 최대

$y = 2nx$, $(2,0)$ 거리 $= \frac{4n}{\sqrt{4n^2+1}}$ $\Rightarrow$ $\triangle A_nB_nP$의 높이 : $\frac{4n}{\sqrt{4n^2+1}} + 1$

$\overline{A_nB_n}$ 길이 : $\sqrt{4+16n^2}$

$\Rightarrow S_n = \left(\sqrt{1+4n^2}\right) \times \left(\frac{4n}{\sqrt{4n^2+1}} + 1\right)$

$\therefore \lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = \frac{\sqrt{1+4n^2}}{n} \times \left(\frac{4n}{\sqrt{4n^2+1}} + 1\right) = 2 \times 3 = 6$

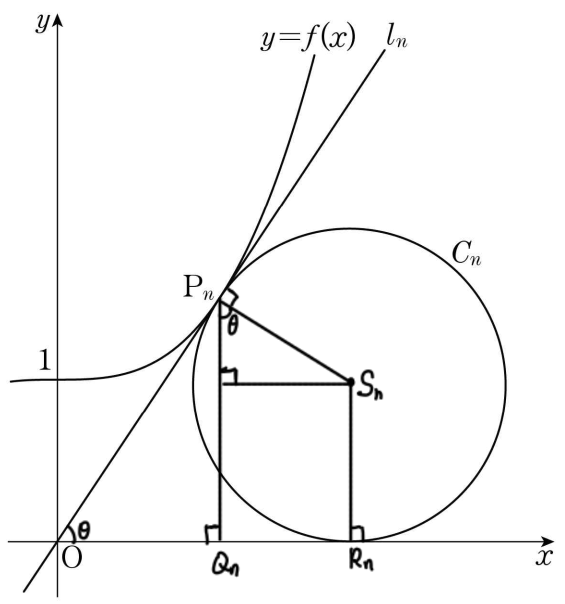
단답형

29. 자연수 n에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=\frac{4}{n^3}x^3+1$$

이라 하자. 원점에서 곡선 $y=f(x)$에 그은 접선을 l_n, 접선 l_n의 접점을 P_n이라 하자. x축과 직선 l_n에 동시에 접하고 점 P_n을 지나는 원 중 중심의 x좌표가 양수인 것을 C_n이라 하자. 원 C_n의 반지름의 길이를 r_n이라 할 때, $40\times\lim_{n\to\infty}n^2(4r_n-3)$의 값을 구하시오. [4점]

270



$f'(x)=\frac{12}{n^3}x^2 \Rightarrow$ t에서의 접선: $y=\frac{12}{n^3}t^2(x-t)+\frac{4}{n^3}t^3+1$

$(0,0)$ 대입 : $\frac{8}{n^3}t^3=1 \Rightarrow t=\frac{n}{2} \Rightarrow P_n\left(\frac{n}{2},\frac{3}{2}\right)$

$\cos\theta=\frac{\overline{OQ_n}}{\overline{OP_n}}=\frac{n}{\sqrt{n^2+9}}$

$\overline{P_nQ_n}=r_n\cdot\cos\theta+r_n=\frac{3}{2} \Rightarrow r_n=\frac{3\sqrt{n^2+9}}{2(n+\sqrt{n^2+9})}$

$\therefore 40\times\lim_{n\to\infty}n^2(4r_n-3)=40\times\lim_{n\to\infty}3n^2\left(\frac{\sqrt{n^2+9}-n}{n+\sqrt{n^2+9}}\right)$

$=40\times\lim_{n\to\infty}3n^2\left(\frac{9}{(n+\sqrt{n^2+9})^2}\right)$

$=40\times\frac{27}{4}=270$

30. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 자연수 m에 대하여 구간 $(0,\infty)$에서 정의된 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{f(x)\left(\frac{x}{m}\right)^n+x}{\left(\frac{x}{m}\right)^n+1}$$

라 하자. 함수 $g(x)$는 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 함수 $g(x)$는 구간 $(0,\infty)$에서 미분가능하고, $g'(m+1)\le 0$이다.
> (나) $g(k)g(k+1)=0$을 만족시키는 자연수 k의 개수는 3이다.
> (다) $g(l)\ge g(l+1)$을 만족시키는 자연수 l의 개수는 3이다.

$g(12)$의 값을 구하시오. [4점]

$g(x)=\begin{cases} x & (0<x<m) \\ \frac{f(x)+x}{2} & (x=m) \\ f(x) & (x>m)\end{cases}$, $g'(x)=\begin{cases} 1 & (0<x<m) \\ \frac{f'(x)+1}{2} & (x=m) \\ f'(x) & (x>m)\end{cases}$ $\Rightarrow$ 조건 (가) 미분가능 : $f(m)=m$, $f'(m)=1$

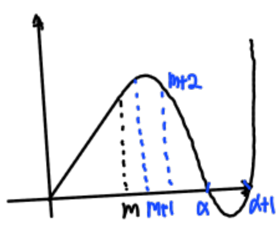
(나) : 두 실근 간격 1

ex)

$g(k)\,g(k+1)=0$
$\alpha \quad \alpha$
$\alpha+1 \quad \alpha+1$
$\Rightarrow k=\alpha-1,\ \alpha,\ \alpha+1$

(다)

i) $g(m)<g(m+1)$



$\Rightarrow$ 세 자연수 l : ① $m+1, m+2, m+3$ or ② $m+2, m+3, m+4$

α : $m+3$ or $m+4$

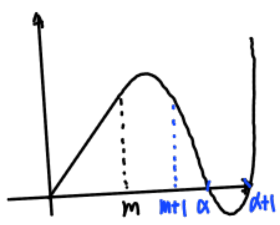
① $f(x)=(x-m-3)(x-m-4)(x-\beta)$

$m=\frac{132}{17}$ (자연수 X)

② $f(x)=(x-m-4)(x-m-5)(x-\beta)$

$m=\frac{551}{180}$ (자연수 X)

ii) $g(m)\ge g(m+1)$



$\Rightarrow$ 세 자연수 l : m, $m+1$, $m+2$

α : $m+2$

$f(x)=(x-m-2)(x-m-3)(x-\beta)$

$f'(x)=(x-m-3)(x-\beta)+(x-m-2)(x-\beta)+(x-m-2)(x-m-3)$

$\begin{cases} 6(m-\beta)=m \\ 5=5(m-\beta)\end{cases} \Rightarrow m=6,\ \beta=5$

$\therefore g(12)=f(12)=4\times3\times7=84$

> * 확인 사항
> ○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
> ○ 이어서, 「선택과목(기하)」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.