제 2 교시

수학 영역

공통과목

1	2	3	4	5
②	①	④	③	①
6	7	8	9	10
⑤	②	③	③	④
11	12	13	14	15
④	②	③	⑤	④
16	17	18	19	20
10	27	17	12	4
21	22			
8	596			

선택과목-확률과 통계

23	24	25	26	27
③	①	③	④	③
28	29	30		
②	19	419		

선택과목-미적분

23	24	25	26	27
①	④	④	③	⑤
28	29	30		
①	32	8		

9.

정답: ③

해설:

step1

$\tan\frac{3}{10}\pi=\tan\left(-\frac{1}{5}\pi+\frac{1}{2}\pi\right)=-\frac{1}{\tan\left(-\frac{1}{5}\pi\right)}=\frac{1}{\tan\frac{1}{5}\pi}$ 이므로

주어진 부등식은 $\sin x>\cos x\times\tan\frac{\pi}{5}$ 와 같다. …㉠

step2

1) $\cos x>0$인 경우

㉠은 $\tan x>\tan\frac{\pi}{5}$과 같다.

$0<x<2\pi$에서 $\cos x>0$을 만족하는 x값의 범위는

$0<x<\frac{\pi}{2}$, $\frac{3}{2}\pi<x<2\pi$이고,

$0<x<2\pi$에서 $\tan x>\tan\frac{\pi}{5}$를 만족하는 x값의 범위는

$\frac{\pi}{5}<x<\frac{\pi}{2}$, $\frac{6}{5}\pi<x<\frac{3}{2}\pi$이다.

따라서 이 경우 주어진 부등식을 만족시키는 x값의 범위는

$\frac{\pi}{5}<x<\frac{\pi}{2}$이다.

2) $\cos x=0$인 경우

$x=\frac{\pi}{2}$일 때 주어진 부등식을 만족하고,

$x=\frac{3}{2}\pi$일 때 주어진 부등식을 만족하지 않는다.

3) $\cos x<0$인 경우

㉠은 $\tan x<\tan\frac{\pi}{5}$과 같다.

$0<x<2\pi$에서 $\cos x<0$을 만족하는 x값의 범위는

$\frac{\pi}{2}<x<\frac{3}{2}\pi$이고,

$0<x<2\pi$에서 $\tan x<\tan\frac{\pi}{5}$를 만족하는 x값의 범위는

$0<x<\frac{\pi}{5}$, $\frac{\pi}{2}<x<\frac{6}{5}\pi$, $\frac{3}{2}\pi<x<2\pi$이다.

따라서 이 경우 주어진 부등식을 만족시키는 x값의 범위는

$\frac{\pi}{2}<x<\frac{6}{5}\pi$이다.

step3

따라서 $0<x<2\pi$에서 부등식 $\sin x>\frac{\cos x}{\tan\frac{3}{10}\pi}$를 만족시키는

모든 x값의 범위는 $\frac{\pi}{5}<x<\frac{6}{5}\pi$이므로

$\alpha=\frac{\pi}{5}$, $\beta=\frac{6}{5}\pi$이고,

$2\alpha+\beta=\frac{8}{5}\pi$이다.

여담:

1) $\theta\pm\frac{n\pi}{2}$ 형태의 각변환 방법

->n이 홀수라면 함수가 바뀌고, n이 짝수라면 함수 그대로!

->$0<\theta<\frac{\pi}{2}$라 할 때, $\theta\pm\frac{n\pi}{2}$가 위치한 사분면에서의 '원래' 삼각함수의 부호가 각변환된 삼각함수의 부호

2) 그래프 풀이가 사실은 더 빠릅니다 ㅎㅎ

10.

정답: ④

해설:

step1

만약 $g(x)$가 $x=3$에서 연속이라면,

함수 $g(x)$와 $g(x-a)$는 a의 값과 상관없이 실수 전체의 집합에서 연속인 함수이므로

함수 $g(x)g(x-a)$ 또한 실수 전체의 집합에서 연속이다.

따라서 $g(x)$가 $x=3$에서 연속이라면,

모든 양수 a에 대해 함수 $g(x)g(x-a)$가 연속이므로

함수 $g(x)g(x-a)$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 양수 a의 개수가 2개로 유한하다는 조건을 만족하지 않는다.

그러므로 $g(x)$는 $x=3$에서 불연속이다. $(f(3)\neq 3)$

step2

함수 $g(x)$는 $x=3$에서 불연속이고,

함수 $g(x-a)$는 $x=a+3$에서 불연속이다.

그러나 $x=3$에서 함수 $g(x)g(x-a)$가 연속이어야 하므로,

$f(3-a)=0$이다. (여담-곱함수의 연속성 참고) …㉠

마찬가지로 함수 $g(x)g(x-a)$는 $x=3+a$에서 연속이어야 하므로

$g(3+a)=0$이다. …㉡

step3

양수 a에 대해, $3-a<3$, $a+3>3$이다.

그러므로 ㉡에 의해 $g(3+a)=|3+a-7|-1=0$이고,

정리하면 $a=3$ 또는 $a=5$이다.

이때 함수 $g(x)g(x-a)$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 양수 a의 개수가 2개이므로,

$a=3$과 $a=5$에서 모두 ㉠을 만족해야 한다.

즉, $a=3$일 때 $g(0)=f(0)=0$,

$a=5$일 때 $g(-2)=f(-2)=0$이므로

최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$는 $f(x)=x(x+2)$이고,

$f(2)=8$이다.

여담:

곱함수의 연속성

실수 전체의 집합에서 좌극한, 우극한, 함숫값이 존재하며, $x=a$에서 연속이 아닌 함수 $f(x)$와, 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $g(x)$가 있을 때, 함수 $y=f(x)g(x)$가 $x=a$에서 연속이라면 $g(a)=0$이다.

증명)

$f(x)$는 $\lim_{x\to a-}f(x)=\alpha$, $\lim_{x\to a+}f(x)=\beta$, $f(a)=\gamma$라 하자.

(단, $\alpha=\beta=\gamma$는 아니다.)

연속함수 $g(x)$에 대해

함수 $f(x)g(x)$가 $x=a$에서 연속이려면

$\alpha g(a)=\beta g(a)=\gamma g(a)$여야 하는데,

이때 $\alpha=\beta=\gamma$가 아니므로 위 등식을 만족하려면 $g(a)=0$이어야 한다.

11.

정답: ④

해설:

step1

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하자.

등차중항의 성질에 의해

$S_5 = 5a_3$, $S_{11} = 11a_6$, $S_7 = 7a_4$이다.

따라서 $|S_5| \times S_{11} = |5a_3| \times 11a_6 = 605$이므로 $|a_3| \times a_6 = 11$이고, …㉠

$S_7 = 7a_4 > 0$이므로 $a_4 > 0$이다. …㉡

step2

a_3의 부호에 따라 경우를 나눠보자.

1) $a_3 > 0$인 경우

등차수열 $\{a_n\}$의 모든 항은 정수이기 때문에

㉠을 통해 $a_3 = 1$이면 $a_6 = 11$, $a_3 = 11$이면 $a_6 = 1$임을 알 수 있다.

$a_3 = 1$이고 $a_6 = 11$인 경우, $a_6 - a_3 = 3d = 10$이므로 $d = \frac{10}{3}$인데, 이 경우 공차가 정수가 아니므로 $\{a_n\}$의 모든 항이 정수라는 조건을 만족하지 않는다.

또한 $a_3 = 11$이고 $a_6 = 1$인 경우, $a_6 - a_3 = 3d = -10$이므로 $d = -\frac{10}{3}$인데, 공차가 정수가 아니므로 $\{a_n\}$의 모든 항이 정수라는 조건을 만족하지 않는다.

따라서 $a_3 < 0$이다.

2) $a_3 < 0$인 경우

㉠을 통해 $a_3 = -11$이면 $a_6 = 1$, $a_3 = -1$이면 $a_6 = 11$임을 알 수 있다.

$a_3 = -11$이고 $a_6 = 1$인 경우, $a_6 - a_3 = 3d = 12$이므로 $d = 4$인데,

이 경우 $a_4 = a_3 + d = -11 + 4 = -7 < 0$이므로 ㉡을 만족하지 않는다.

따라서 $a_3 = -1$이고 $a_6 = 11$이다.

이때 $a_6 - a_3 = 3d = 12$이므로 $d = 4$인데,

이 경우 $a_4 = a_3 + d = -1 + 4 = 3 > 0$이므로 ㉡을 만족한다.

그러므로 $a_3 = -1$, $a_6 = 11$, $d = 4$이다.

step3

등차중항의 성질에 의해 $S_9 = 9a_5$이고

$a_5 = a_3 + 2d = 7$이므로

S_9의 값은 63이다.

여담:

등차중항의 성질 활용

ex1)

$S_5 = (a_1 + a_5) + (a_2 + a_4) + a_3 = 2a_3 + 2a_3 + a_3 = 5a_3$

$S_7 = (a_1 + a_7) + (a_2 + a_6) + (a_3 + a_5) + a_4 = 2a_4 + 2a_4 + 2a_4 + a_4 = 7a_4$

ex2) $a_m + a_n = 2a_{\frac{m+n}{2}}$ ($\frac{m+n}{2}$가 정수가 아닌 경우에도 성립)

ex3) $p + q = r + s$이면, $a_p + a_q = a_r + a_s$이다.

12.

정답: ②

해설:

step1

점 P의 시각 t에서의 위치를 $x(t)$라 하면,

$x(0)=8$, $v(t)=at^2+bt$이므로

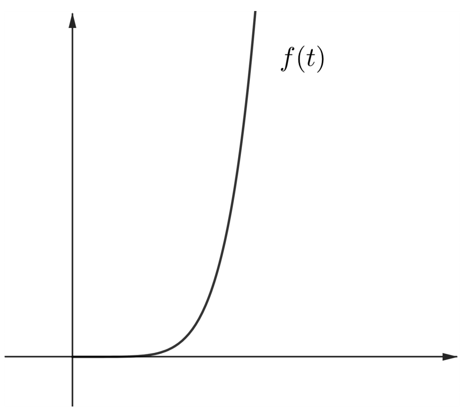
$x(t)=\frac{a}{3}t^3+\frac{b}{2}t^2+8$이고,

$f(t)=|x(t)|$이다.

step2

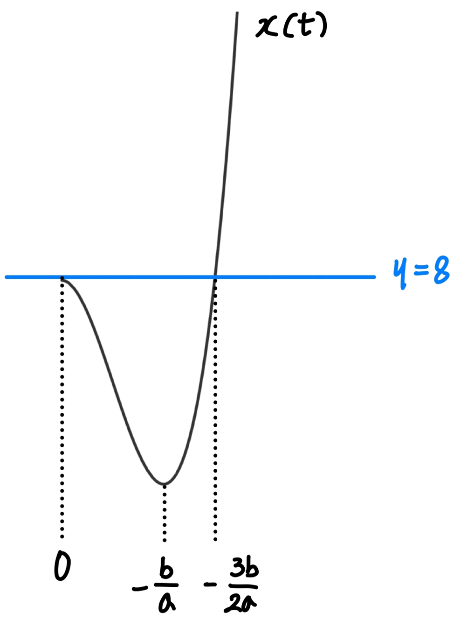
a와 b의 부호에 따라 개형을 나눠보자.

1) $b=0$인 경우



이 경우 $f(t)$는 $t\geq 0$에서 항상 증가하기 때문에 구간 $[2,4]$에서 감소한다는 조건을 만족하지 않는다.

2) $a>0$, $b<0$인 경우



만약 $x(p)=0$을 만족하는 $p\leq -\frac{b}{a}$인 p가 존재한다면,

$0\leq t\leq p$에서 $f(t)$가 감소하기 때문에

함수 $f(t)$가 오직 구간 $[2,4]$에서만 감소한다는 조건을 만족하지 않고,

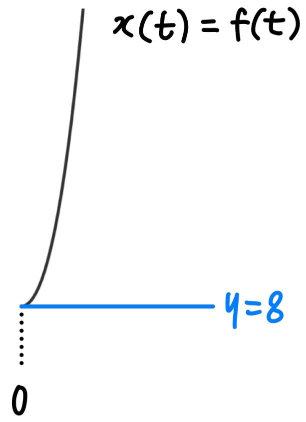
만약 $x(p)=0$을 만족하는 $p\leq -\frac{b}{a}$인 p가 존재하지 않는다면,

$0\leq t\leq -\frac{b}{a}$에서 $f(t)$가 감소하기 때문에

함수 $f(t)$가 오직 구간 $[2,4]$에서만 감소한다는 조건을 만족하지 않는다.

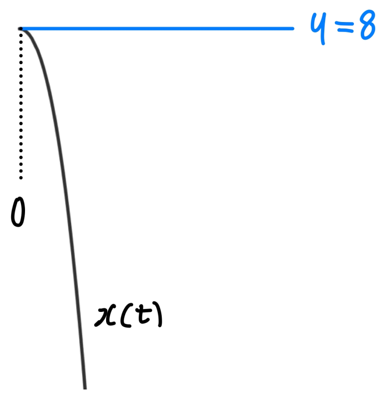
따라서 $a>0$, $b<0$인 경우 주어진 조건을 만족하지 않는다.

3) $a>0$, $b>0$인 경우



이 경우 $f(t)$는 $t\geq 0$에서 항상 증가하기 때문에 구간 $[2,4]$에서 감소한다는 조건을 만족하지 않는다.

4) $a<0$, $b<0$인 경우

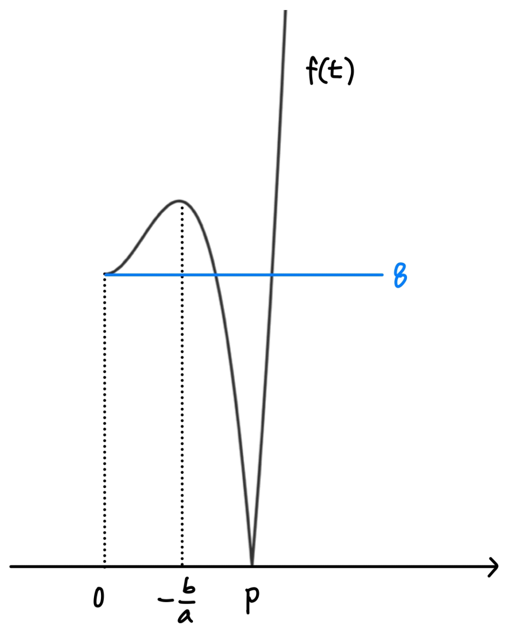


$x(t)$는 $x\geq 0$에서 감소하므로, $x(p)=0$을 만족하는 양수 p가 존재한다.

이때 $0\leq t\leq p$에서 $f(t)$가 감소하기 때문에

함수 $f(t)$가 오직 구간 $[2,4]$에서만 감소한다는 조건을 만족하지 않는다.

5) $a<0$, $b>0$인 경우



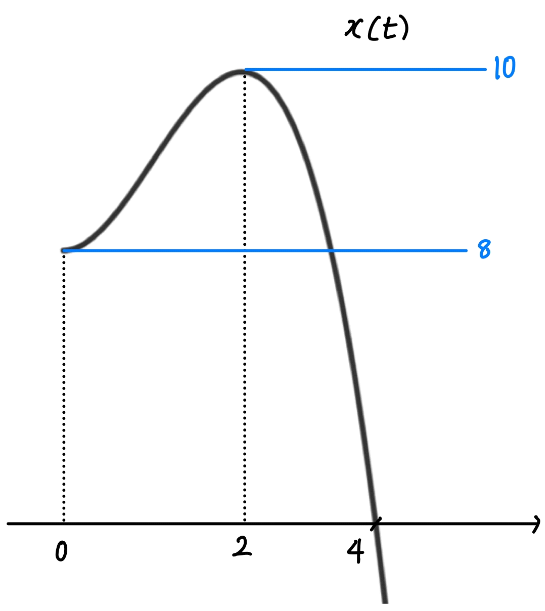
$x(t)$는 $t \ge -\frac{b}{a}$에서 감소하므로 $x(p)=0$인 $p>-\frac{b}{a}$인 p가 존재한다.

이때 $f(t)$의 그래프는 구간 $\left[-\frac{b}{a}, p\right]$에서만 감소하므로 $-\frac{b}{a}=2$, $p=4$이다.

따라서 $b=-2a$, $x(4)=0$이므로

$x(t)=\frac{a}{3}t^3+\frac{b}{2}t^2+8=-\frac{1}{2}t^3+\frac{3}{2}t^2+8$이다.

step3



시각 $t=0$부터 시각 $t=4$까지 점 P가 움직인 거리는

$\int_0^4 |v(t)|dt = \int_0^2 v(t)dt + \int_2^4 -v(t)dt = x(2)-x(0)+\{x(4)-x(2)\}$
$=12$이므로 $k>4$이다.

따라서 시각 $t=0$부터 시각 $t=k$까지 점 P가 움직인 거리는

$\int_0^k |v(t)|dt = \int_0^4 |v(t)|dt + \int_4^k v(t)dt = 12+x(k)=29$이므로
$x(k)=17$이다.

그러므로 $f(k)=|x(k)|=17$이다.

여담:

step2에서 $x=0$ 주위에서 감소하는지, 감소하는 부분이 존재하는지로 빠르게 상황 찾기가 가능하다.

step3에서 $\int_0^x |v(t)|dt$는 증가함수임을 이용해 $k>4$임을 알아냈다.

참고로 $\int_0^x |v(t)|dt$는 $t=0$부터 $t=x$까지 $x(t)$의 변화량의 총합과 같다.

13.

정답: ③

해설:

step1

보조선 $\overline{BC}$, $\overline{CD}$를 그어보자.

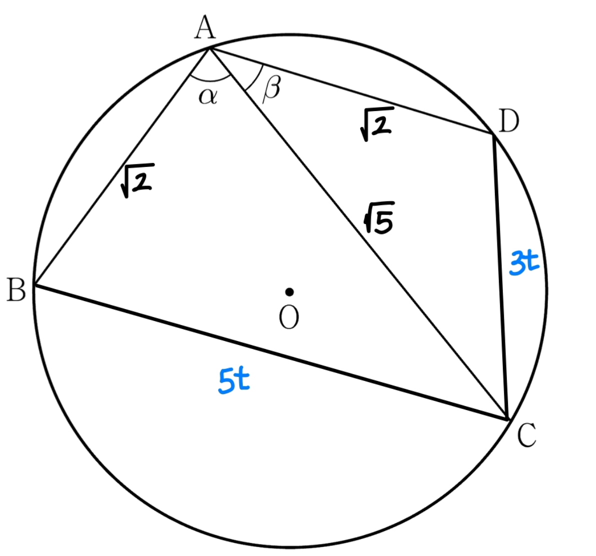
주어진 원의 반지름의 길이를 r이라 하면, (단, $r>0$)

삼각형 ABC에서 사인법칙에 의해 $\overline{BC}=2r\sin\alpha$이고,

삼각형 ACD에서 사인법칙에 의해 $\overline{CD}=2r\sin\beta$이다.

이때 주어진 조건에서 $\sin\alpha:\sin\beta=5:3$이므로 $\overline{BC}:\overline{CD}=5:3$이다.

$\overline{BC}=5t$, $\overline{CD}=3t$라 하자. (단, $t>0$)



step2

주어진 조건에서 $\overline{AB}=\overline{AD}$이므로 $\angle ACB=\angle ACD$이다.

따라서 $\cos\angle ACB=\cos\angle ACD$이다.

삼각형 ABC에서 코사인법칙을 적용하면

$$\cos\angle ACB=\frac{\{\overline{AC}\}^2+\{\overline{BC}\}^2-\{\overline{AB}\}^2}{2\times\overline{AC}\times\overline{BC}}=\frac{25t^2+3}{10\sqrt{5}t}\text{이고,}$$

삼각형 ACD에서 코사인법칙을 적용하면

$$\cos\angle ACD=\frac{\{\overline{AC}\}^2+\{\overline{CD}\}^2-\{\overline{AD}\}^2}{2\times\overline{AC}\times\overline{CD}}=\frac{9t^2+3}{6\sqrt{5}t}\text{이다.}$$

이때 $\cos\angle ACB=\cos\angle ACD$이므로 $\dfrac{25t^2+3}{10\sqrt{5}t}=\dfrac{9t^2+3}{6\sqrt{5}t}$이고,

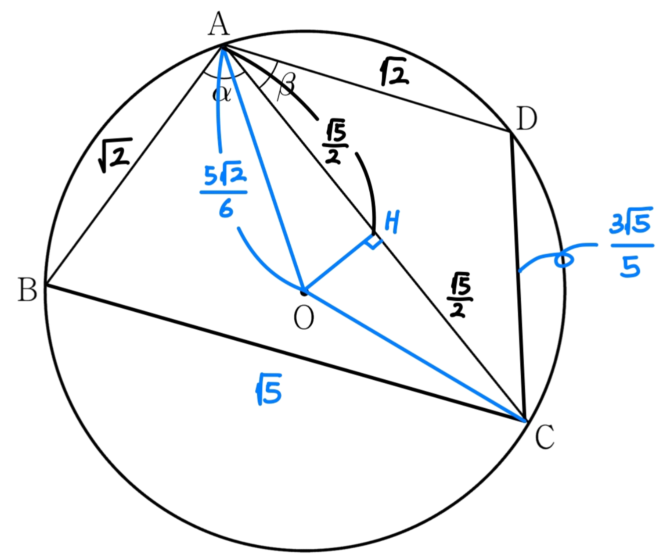
정리하면 $t=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$, $\cos\angle ACB=\dfrac{4}{5}$이다.

step3

$\cos\angle ACB=\dfrac{4}{5}$이므로 $\sin\angle ACB=\dfrac{3}{5}$이다.

따라서 삼각형 ABC에서 사인법칙에 의해

$r=\dfrac{\overline{AB}}{2\sin\angle ACB}=\dfrac{5\sqrt{2}}{6}$이다.



보조선 $\overline{OA}$와 보조선 $\overline{OC}$를 긋고,

점 O에서 선분 $\overline{AC}$에 그은 수선의 발을 점 H라 하자.

삼각형 OAC는 $\overline{OA}=\overline{OC}=r=\dfrac{5\sqrt{2}}{6}$인 이등변삼각형이므로

$\overline{AH}=\overline{CH}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$이다.

따라서 점 O와 직선 AC 사이의 거리는

$\overline{OH}=\sqrt{\{\overline{OA}\}^2-\{\overline{AH}\}^2}=\dfrac{\sqrt{5}}{6}$이다.

14.

정답: ⑤

해설:

step1

$f(t)$의 값의 부호에 따라 경우를 나누어 함수 $g(t)$의 식을 구해보자.

1) $f(t)>0$인 경우

$\lim_{x\to t}(x-t+|f(t)|)=f(t)>0$이므로

$g(t)=\lim_{x\to t}\frac{f(x)}{x-t+f(t)}=\frac{f(t)}{f(t)}=1$이다.

2) $f(t)<0$인 경우

$\lim_{x\to t}(x-t+|f(t)|)=-f(t)>0$이므로

$g(t)=\lim_{x\to t}\frac{f(x)}{x-t-f(t)}=\frac{f(t)}{-f(t)}=-1$이다.

3) $f(t)=0$인 경우

$g(t)=\lim_{x\to t}\frac{f(x)}{x-t+|f(t)|}=\lim_{x\to t}\frac{f(x)}{x-t}=f'(t)$이다.

따라서 $g(t)=\begin{cases}1 & (f(t)>0)\\ f'(t) & (f(t)=0)\\ -1 & (f(t)<0)\end{cases}$ 이다.

step2

1) 주어진 등식을 만족하는 $f(a)>0$인 a가 존재하는 경우

$\lim_{t\to a+}g(t)=\lim_{t\to a-}g(t)=g(a)=1$이므로,

$\lim_{t\to a+}g(t)+\lim_{t\to a-}g(t)+g(a)=3=a$,

즉 $a=3$인 경우 $f(a)>0$을 만족한다면 주어진 등식을 만족한다.

2) 주어진 등식을 만족하는 $f(a)<0$인 a가 존재하는 경우

$\lim_{t\to a+}g(t)=\lim_{t\to a-}g(t)=g(a)=-1$이므로,

$\lim_{t\to a+}g(t)+\lim_{t\to a-}g(t)+g(a)=-3=a$,

즉 $a=-3$인 경우 $f(a)<0$을 만족한다면 주어진 등식을 만족한다.

3) $f(t)=0$인 경우

삼차함수 $f(x)$의 극값이 0이므로,

방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.

방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 두 실근을 각각 p, q라 하면,

(단, $p<q$)

$f(t)=0$인 경우 주어진 등식 $\lim_{t\to a+}g(t)+\lim_{t\to a-}g(t)+g(a)=a$를 만족할 수 있는 a는 최대 2개 존재한다.

($a=p$, $a=q$인 경우)

따라서, 1), 2), 3)을 종합해보면,

주어진 등식을 만족할 수 있는 실수 a의 개수는

1)에서 최대 1개, 2)에서 최대 1개, 3)에서 최대 2개 존재하므로

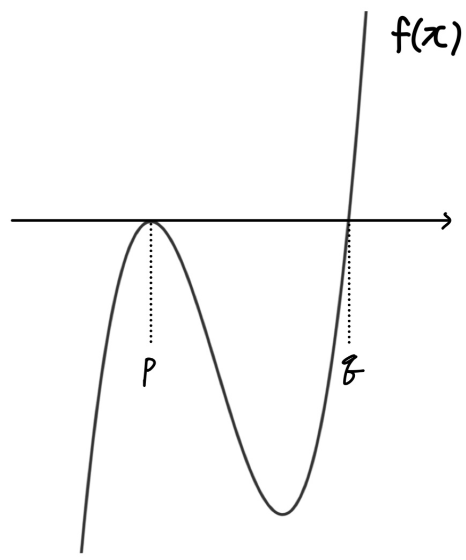
최대 4개가 가능한데,

주어진 조건에서 주어진 등식을 만족시키는 모든 실수 a의 개수가 4개라 했으므로,

1), 2), 3)에서 가능한 모든 경우 주어진 등식을 만족시켜야 한다.

step3

① $f'(p)=0$, $f'(q)\neq 0$인 경우 (단, $p<q$)



$a=p$일 때

$\lim_{t\to p+}g(t)=-1$, $\lim_{t\to p-}g(t)=-1$, $g(p)=f'(p)=0$이므로

$\lim_{t\to p+}g(t)+\lim_{t\to p-}g(t)+g(p)=-2=p$이다.

또한 $a=q$일 때

$\lim_{t\to q+}g(t)=1$, $\lim_{t\to q-}g(t)=-1$, $g(q)=f'(q)$이므로

$\lim_{t\to q+}g(t)+\lim_{t\to q-}g(t)+g(q)=f'(q)=q$이다.

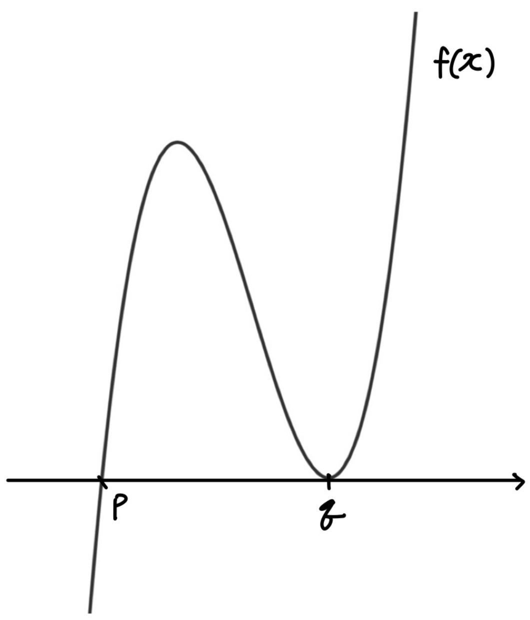
따라서, 이 경우 $p=-2$, $f'(q)=q$여야 한다.

$f(x)=(x+2)^2(x-q)$라 하면

$f'(q)=(q+2)^2=q$여야 하는데,

이를 만족하는 실수 q는 존재하지 않으므로 모순이다.

② $f'(p)\neq 0$, $f'(q)=0$인 경우 (단, $p<q$)



$a=p$일 때

$\lim_{t\to p+} g(t)=1$, $\lim_{t\to p-} g(t)=-1$, $g(p)=f'(p)$이므로

$\lim_{t\to p+} g(t)+\lim_{t\to p-} g(t)+g(p)=f'(p)=p$이다.

또한 $a=q$일 때

$\lim_{t\to q+} g(t)=1$, $\lim_{t\to q-} g(t)=1$, $g(q)=f'(q)=0$이므로

$\lim_{t\to q+} g(t)+\lim_{t\to q-} g(t)+g(q)=2=q$이다.

따라서, 이 경우 $f'(p)=p$, $q=2$여야 한다.

$f(x)=(x-p)(x-2)^2$라 하면

$f'(p)=(p-2)^2=p$여야 하는데,

이를 만족하는 실수 p는 $p=1$ 또는 $p=4$이다.

이때 $p<q=2$이므로 $p=1$이다.

그러므로 $f(x)=(x-1)(x-2)^2$이고, $f(4)=12$이다.

($f(3)>0$, $f(-3)<0$ 모두 만족하므로 이상없다.)

15.

정답: ④

해설:

step1

만약 a_1이 홀수라면, $a_3=a_2+a_1$이므로

$a_2=a_3$이라는 주어진 조건에 의해 $a_1=0$이 된다.

따라서 a_1은 짝수이고, $a_3=\frac{1}{2}a_1+1$이다. …㉠

step2

$a_7=a$라 하면, 주어진 조건에 의해 $a_2=a_3=a-7$이다.

(단, $\{a_n\}$의 모든 항이 자연수이므로 $a>7$)

따라서 ㉠에 의해 $a_1=2a-16$이다.

$\Rightarrow$ $a_1=2a-16$, $a_2=a_3=a-7$, $a_7=a$

step3

a의 홀수, 짝수 여부에 따라 경우를 나눠보자.

1) a가 짝수인 경우

$a_2=a_3=a-7$이고, $a-7$은 홀수이다.

$a_4=a_3+a_2=2a-14$이고, $2a-14$는 짝수이다.

$a_5=a_4+a_3=3a-21$이고, $3a-21$은 홀수이다.

$a_6=\frac{1}{2}a_4+1=a-6$이고, $a-6$은 짝수이다.

$a_7=4a-27$이다.

이때 $a_7=a$이므로 $4a-27=a$이고, $a=9$인데,

앞서 a가 짝수라고 가정했으므로 모순이다.

따라서 a는 홀수이다.

2) a가 홀수인 경우

$a_2=a_3=a-7$이고, $a-7$은 짝수이다.

$a_4=a_5=\frac{1}{2}a_2+1=\frac{1}{2}a_3+1=\frac{a-5}{2}$이다.

$\Rightarrow$ a는 홀수, $a_4=a_5=\frac{a-5}{2}$

step4

$\frac{a-5}{2}$의 홀수, 짝수 여부에 따라 경우를 나눠보자.

1) $\frac{a-5}{2}$가 짝수인 경우

$a_4=a_5=\frac{a-5}{2}$이고, $\frac{a-5}{2}$는 짝수이다.

$a_6=a_7=\frac{1}{2}a_4+1=\frac{1}{2}a_5+1=\frac{a-1}{4}$이다.

이때 $a_7=a$이므로 $\frac{a-1}{4}=a$이고, $a=-\frac{1}{3}$인데,

a는 자연수이므로 모순이다.

따라서 $\frac{a-5}{2}$는 홀수이다.

2) $\frac{a-5}{2}$가 홀수인 경우

$a_4=a_5=\frac{a-5}{2}$이고, $\frac{a-5}{2}$는 홀수이다.

$a_6=a_5+a_4=a-5$이고, $a-5$는 짝수이다.

$a_7=a_6+a_5=\frac{3a-15}{2}$이다.

이때 $a_7=a$이므로 $\frac{3a-15}{2}=a$이고, 정리하면 $a=15$이다.

($a=15$일 때 a는 홀수이고, $\frac{a-5}{2}$도 홀수이다.)

step4

$a_1=2a-16=14$이다.

$a_6=a-5=10$이므로 $a_8=\frac{1}{2}a_6+1=6$이고,

$a_7=a=15$이므로 $a_9=a_8+a_7=21$이다.

따라서 $a_1+a_9=35$이다.

20.

정답: 4

해설:

step1 **함수** $\int_0^x |g(t)|dt$ **관찰**

함수 $\int_0^x |g(t)|dt$는 연속함수이므로, $x=0$에서도 연속이다.

따라서 $f(0)=0$이다.
…㉠

step2 **함수** $|g(x)|$ **관찰**

주어진 등식을 x에 대해 미분하면

$|g(x)|=\begin{cases} 4 & (x<0) \\ f'(x) & (x \geq 0) \end{cases}$ 이고,

$g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로,

$|g(x)|$ 또한 실수 전체의 집합에서 연속이다.

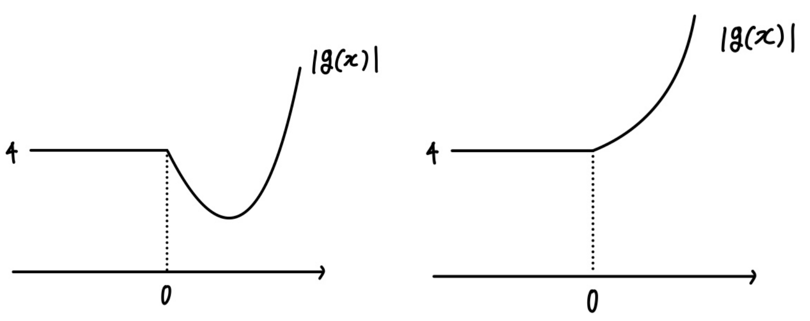
따라서 함수 $|g(x)|$는 $x=0$에서 연속이므로, $f'(0)=4$이다.

또한 모든 실수 x에 대해 $|g(x)| \geq 0$이므로,

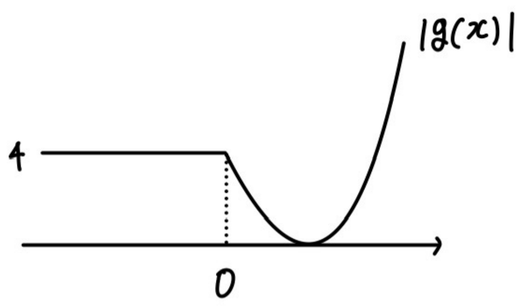
$x \geq 0$에서 $f'(x) \geq 0$이어야 한다.

$|g(x)|$의 그래프는 다음과 같이 경우를 나눌 수 있다.

1) $|g(x)|=0$을 만족하는 x가 존재하지 않는 경우



2) $|g(x)|=0$을 만족하는 x가 존재하는 경우



step3 **함수** $g(x)$ **관찰**

주어진 조건에 의해 $-g(-1)=g(2)>0$이므로,

$g(-1)<0,\ g(2)>0$이다.

또한 $g(x)$는 연속함수이므로,

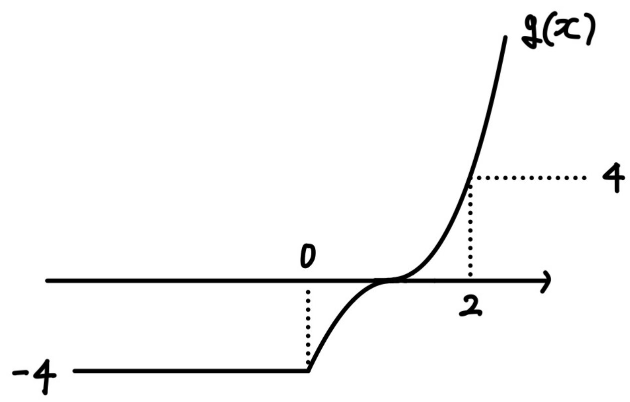
사잇값정리에 의해 구간 $(-1, 2)$에 $g(x)=0$을 만족하는 실수 x가 적어도 하나 존재한다.

이때 1)의 경우, 모든 실수 x에 대해 $g(x)>0$ 또는 $g(x)<0$이므로 $g(x)=0$을 만족하는 x값이 존재하지 않는다.

그러므로 $|g(x)|$의 개형은 2)와 같다.

이때 $x<0$에서 $|g(x)|=4$이고, $g(-1)<0$이므로 $g(-1)=-4$이고, $g(2)=4$이다.

따라서 $g(x)$의 개형은 아래 그림과 같다.



step4

이차함수 $f'(x)$는 $x \geq 0$에서 $f'(x) \geq 0$이므로,

$f'(0)=4,\ f'(2)=4$이고 x축과 접한다.

따라서 $f'(x)=4x(x-2)+4$이다.

이때 ㉠에 의해 $f(0)=0$이므로 $f(x)=\frac{4}{3}x^3-4x^2+4x$이므로

$f(2)=\frac{8}{3}$이다.

또한

$\int_{-2}^{3} g(t)dt=\int_{-2}^{0}-4dt+\int_{0}^{1}-f'(t)dt+\int_{1}^{2}f'(t)dt+\int_{2}^{3}f'(t)dt$인데,

이차함수 $f'(x)$는 $x=1$에 대해 대칭이므로

$\int_{0}^{1}-f'(t)dt+\int_{1}^{2}f'(t)dt=0$이다.

따라서 $\int_{-2}^{3} g(t)dt=\int_{-2}^{0}-4dt+\int_{2}^{3}f'(t)dt=-8+\frac{28}{3}=\frac{4}{3}$이다.

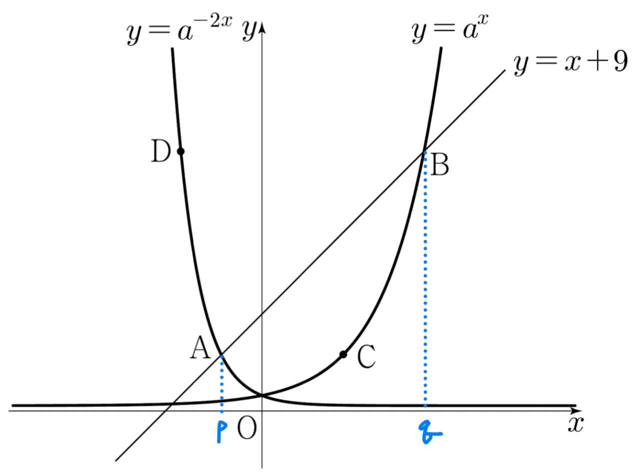
그러므로 $f(2)+\int_{-2}^{3} g(t)dt=\frac{8}{3}+\frac{4}{3}=4$이다.

21.

정답: 8

해설:

step1



점 A의 x좌표를 p, 점 B의 x좌표를 q라 하자. (단, $p<0<q$)

점 A의 y좌표는 $a^{-2p}=p+9$이므로, …㉠

점 C의 y좌표 또한 $a^{-2p}=p+9$이고,

이때 점 C는 곡선 $y=a^{x}$ 위의 점이므로 점 C의 x좌표는 $-2p$이다.

점 B의 y좌표는 $a^{q}=q+9$이므로, …㉡

점 D의 y좌표 또한 $a^{q}=q+9$이고,

이때 점 D는 곡선 $y=a^{-2x}$ 위의 점이므로 점 D의 x좌표는 $-\frac{q}{2}$이다.

따라서 점 A, B, C, D의 좌표는

$A(p, p+9)=A(p, a^{-2p})$, $B(q, q+9)=B(q, a^{q})$,

$C(-2p, p+9)=C(-2p, a^{-2p})$, $D\left(-\frac{q}{2}, q+9\right)=D\left(-\frac{q}{2}, a^{q}\right)$ 이다.

step2

주어진 조건에 의해 직선 CD의 기울기가 $-\frac{5}{4}$이므로

$\frac{(q+9)-(p+9)}{-\frac{q}{2}-(-2p)}=-\frac{5}{4}$이고, 정리하면 $q=-4p$이다.

이를 ㉡에 대입하면 $-4p+9=a^{-4p}$이고,

㉠에 의해 $a^{-2p}=p+9$이므로 $a^{-4p}=-4p+9=(p+9)^{2}$이다.

정리하면 $p=-4$ 또는 $p=-18$이고, $q=-4p$이므로

$p=-4$일 때 $q=16$, $a^{8}=5$이고,

$p=-18$일 때 $q=72$, $a^{36}=-9$이다.

이때 $a^{36}=-9$을 만족하는 양수 a는 존재하지 않으므로,

$a^{8}=5$이고, $\log_{a}5=8$이다.

22.

정답: 596

해설:

step1

주어진 조건을 만족하는 정수가 '오직' m 뿐이라는 말을 해석해보자.

먼저, $k=m-1$에서 주어진 조건을 만족하지 않으므로 $f(m-2) \leq f(m-1) < f(m)$이고, …㉠

$k=m+1$에서도 주어진 조건을 만족하지 않으므로

$f(m) \leq f(m+1) < f(m+2)$이다. …㉡

또한 $k=m$에서 주어진 조건을 만족하므로

$f(m-1) > f(m)$ 이거나 $f(m) \geq f(m+1)$이다.

이때

$f(m-1) > f(m)$은 ㉠에 의해 불가능하고,

$f(m) > f(m+1)$은 ㉡에 의해 불가능하므로 $f(m) = f(m+1)$이다.

따라서 $f(m-2) \leq f(m-1) < f(m) = f(m+1) < f(m+2)$이다. …㉢

step2

주어진 조건에 의해 $m = f'(m) = f(m)$이고,

$f(x)$의 최고차항 계수가 3이므로

$f(x) = 3(x-m)^3 + p(x-m)^2 + m(x-m) + m$이라 하자.

이때 ㉢에 의해 $f(m) = f(m+1)$이므로

$f(m+1) = 3 + p + m + m = m$이고,

정리하면 $p = -m-3$,

$f(x) = 3(x-m)^3 + (-m-3)(x-m)^2 + m(x-m) + m$이다. …㉣

step3

주어진 조건에 의해 $f(x)$의 상수항이 양수이므로 $f(0) > 0$이다.

이를 ㉣에 대입하면,

$f(0) = -3m^3 + (-m-3)m^2 - m^2 + m > 0$이므로, $m \leq -2$이다.

또한 ㉢에 의해 $f(m-1) < f(m)$이므로

$f(m-1) = -3 + (-m-3) - m + m < m$이고,

정리하면 $m > -3$이다.

따라서 $-3 < m \leq -2$를 만족하는 정수 m의 값은 -2이고,

$f(x) = 3(x+2)^3 - (x+2)^2 - 2(x+2) - 2$이므로 $f(4) = 598$이다.

그러므로 $m + f(4) = 596$이다.

28.

정답: ①

해설:

step1

$a_n = a \times r^{n-1}$이라 하자. (단, $a \neq 0$, $r \neq 0$)

주어진 조건에 의해 $\sum_{n=1}^{\infty} f(a_n)$이 수렴하므로,

$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = 0$이다. …㉠

r값의 범위에 따라 경우를 나눠보자.

1) $|r| > 1$인 경우

$n\to\infty$일 때 $a_n \to \infty$ 또는 $a_n \to -\infty$이므로

$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \infty$또는 $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = -\infty$이다.

($f(x)$의 최고차항 계수가 양수면 $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \infty$, $f(x)$의 최고차항 계수가 음수면 $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = -\infty$이다.)

따라서 ㉠을 만족하지 않는다.

2) $|r| = 1$인 경우

$r = 1$일 때,

$n\to\infty$일 때 $a_n = a$이므로 $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(a)$이다.

따라서 ㉠을 만족하기 위해선 $f(a) = 0$이어야 하는데,

이 경우 $\sum_{n=1}^{\infty} f(a_n) = 0$이므로 주어진 조건을 만족하지 않는다.

$r = -1$일 때,

$n\to\infty$일 때 a_n은 진동발산하며, $f(a_n)$의 값은 $f(a)$ 또는 $f(-a)$이다.

만약 $f(a) = f(-a) = 0$이라면 $\sum_{n=1}^{\infty} f(a_n) = 0$이므로 주어진 조건을 만족하지 않고,

$f(a) + f(-a) = 0$이어도 주어진 급수는 수렴하지 않는다.

($\sum_{n=1}^{\infty} f(a_n) = f(a)$ 또는 $\sum_{n=1}^{\infty} f(a_n) = -f(a)$)

이 외의 경우 주어진 급수는 ∞또는 $-\infty$로 발산하므로,

$|r| \neq 1$이다.

3) $0 < |r| < 1$인 경우

$n\to\infty$일 때 $a_n \to 0$이므로 $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(0) = 0$이다.

$\Rightarrow$ $0 < |r| < 1$이고, $f(0) = 0$이다.

주어진 조건에 의해 $f(2) = 0$이므로, $f(x) = kx(x-2)$라 하자.

(단, $k \neq 0$) …㉡

step2

$S_n = \dfrac{a \times (r^n - 1)}{r-1}$이다.

주어진 조건에 의해 $\sum_{n=1}^{\infty} f(S_n)$이 수렴하므로,

$\lim_{n\to\infty} f(S_n) = 0$이다.

따라서 $f\left(\dfrac{a}{1-r}\right) = 0$인데, $\dfrac{a}{1-r} \neq 0$이므로 $\dfrac{a}{1-r} = 2$이다.

$\Rightarrow$ $a_n = (2-2r) \times r^{n-1}$, $S_n = -2(r^n - 1)$ …㉢

step3

㉡, ㉢에 의해

$f(a_n) = 4k(1-r) \times (r^{2n-2} - r^{2n-1} - r^{n-1})$이고,

$f(S_n) = 4k \times (r^{2n} - r^n)$이다.

따라서

$\sum_{n=1}^{\infty} f(S_n) = \sum_{n=1}^{\infty} 4k \times (r^{2n} - r^n) = 4k \times \left(\dfrac{r^2}{1-r^2} - \dfrac{r}{1-r}\right) = \dfrac{-4kr}{1-r^2} = 8$이고

,

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(a_n) = 4k(1-r) \times \left(\sum_{n=1}^{\infty} r^{2n-2} - \sum_{n=1}^{\infty} r^{2n-1} - \sum_{n=1}^{\infty} r^{n-1}\right)$$

$$= 4k(1-r) \times \left(\frac{1}{1-r^2} - \frac{r}{1-r^2} - \frac{1}{1-r}\right)$$

$= -\dfrac{8kr}{1+r} = 24$이므로

$r = -\dfrac{1}{2}$, $k = 3$이다.

따라서 $a_n = (2-2r) \times r^{n-1} = 3 \times \left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$이므로 $a_2 = -\dfrac{3}{2}$이고,

$f(x) = 3x(x-2)$이므로 $f(a_2) = \dfrac{63}{4}$이다.

그러므로 $12 \times f(a_2) = 189$이다.

29.

정답: 32

해설:

step1

함수 $(x-a)^2+(x-a)-\ln x$가 극솟값을 가지는 x값을 $g(t)$라 하자.

($g(t)$는 x에 대한 방정식 $2(x-a)+1-\frac{1}{x}=0$의 가장 큰 실근이므로 직접 식을 구할 수 있다. …㉠

$g(t)=\frac{2a-1+\sqrt{(2a-1)^2+8}}{4}>0$이므로

함수 $(x-a)^2+(x-a)-\ln x$의 $x>0$에서의 최솟값은 $x=g(t)$에서 발생한다.)

$x=g(t)$일 때 주어진 부등식이 성립해야하므로,

$(g(t)-a)^2+(g(t)-a)-\ln g(t)\geq t$이고,

이때 실수 a의 최댓값이 $f(t)$이므로

$(g(t)-f(t))^2+(g(t)-f(t))-\ln g(t)=t$이다. …㉡

정리하면,

㉠에 의해 $2(g(t)-f(t))+1-\frac{1}{g(t)}=0$이고,

$(g(t)-f(t))^2+(g(t)-f(t))-\ln g(t)=t$이다. …㉡

step2

$g(t)-f(t)=h(t)$라 하자.

㉠에 의해 $2h(t)+1-\frac{1}{g(t)}=0$이고, …㉢

㉡에 의해 $\{h(t)\}^2+h(t)-\ln g(t)=t$이다. …㉣

등식 ㉢을 t에 대해 미분하면 $2h'(t)+\frac{g'(t)}{\{g(t)\}^2}=0$이고,

등식 ㉣을 t에 대해 미분하면
$2h(t)\times h'(t)+h'(t)-\frac{g'(t)}{g(t)}=1$이다. …㉤

step3

$t=k$를 대입해보면, $h(k)=g(k)-f(k)=g(k)-\frac{1}{2}$이고,

이를 등식 ㉢에 대입하면 $2\times\left(g(k)-\frac{1}{2}\right)+1-\frac{1}{g(k)}=0$이므로

$g(k)=\frac{1}{\sqrt{2}}$이다.

(step1에서 구했듯 $g(t)>0$이므로)

따라서 $h(k)=g(k)-f(k)=\frac{\sqrt{2}-1}{2}$임을 알 수 있다.

등식 ㉣에 $t=k$를 대입하면,

$\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)^2+\frac{\sqrt{2}-1}{2}-\ln\frac{1}{\sqrt{2}}=k$이므로 $k=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\ln 2$이다.

또한 등식 ㉤에 $t=k$를 대입해보면,

$2\times\frac{\sqrt{2}-1}{2}\times h'(k)+h'(k)-\frac{g'(k)}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=1$이므로

$\sqrt{2}(h'(k)-g'(k))=1$임을 알 수 있다.

따라서 $h'(k)-g'(k)=\frac{\sqrt{2}}{2}$인데, $f'(k)=h'(k)-g'(k)$이므로

$f'(k)=\frac{\sqrt{2}}{2}$이다.

그러므로 $k\times\{f'(k)\}^2=\frac{1}{8}+\frac{1}{4}\ln 2$이므로 $p=\frac{1}{8}$, $q=\frac{1}{4}$이고,

$\frac{1}{pq}=32$이다.

30.

정답: 8

해설:

step1

(가) 조건에 의해 $t>-1$인 모든 실수 t에 대해

$\int_{-1}^{t}\sqrt{\{g'(x)\}^2+1}\,dx=f(t)$이고,

$t\to\infty$일 때 $f(t)>0$이므로 $f(x)$의 최고차항 계수가 양수이며,

$f(x)$는 연속함수이므로 $f(-1)=0$이다.
…㉠

($t\to-1+$일 때 $f(t)\to 0$이므로)

㉠의 등식을 t에 대해 미분하면

$t>-1$인 모든 실수 t에 대해 $\sqrt{\{g'(t)\}^2+1}=f'(t)$이고,

정리하면 $g'(t)=\pm\sqrt{\{f'(t)\}^2-1}$이다. …㉡

step2

(나) 조건에 의해 $x=0$ 주위에서 x값이 커짐에 따라 $g'(x)$의 값은 (양수) $\to$ 0 $\to$ (음수)로 변하고,

$g'(0)=0$, 즉 $f'(0)=\pm 1$임을 알 수 있다.

이때 ㉡에 의해 $x>-1$에서 $\{f'(x)\}^2-1>0$이므로,

이차함수 $f'(x)$는 $x=0$에서 극값을 가진다는 점을 알 수 있다.

또한 주어진 조건에서 $g'(-1)=2\sqrt{2}$라 하였으므로, ㉡에 의해 $f'(-1)=\pm 3$임을 알 수 있다.

따라서 $f'(0)=1$이면 $f''(0)=0$, $f'(-1)=3$이고,

$f'(0)=-1$이면 $f''(0)=0$, $f'(-1)=-3$이다.

그러므로 $f'(x)=2x^2+1$ 또는 $f(x)=-2x^2-1$인데,

$f(x)$의 최고차항 계수는 양수이므로 $f'(x)=2x^2+1$이고,

㉠에 의해 $f(-1)=0$이므로 $f(x)=\frac{2}{3}x^3+x+\frac{5}{3}$이며.

$g'(x)=\pm\sqrt{\{f'(x)\}^2-1}=\pm 2x\sqrt{x^2+1}$이다.

step3

$x=0$ 주위에서 x값이 커짐에 따라 $g'(x)$의 값은 (양수) $\to$ 0 $\to$ (음수)로 변해야 하므로

$x>-1$에서 $g'(x)=-2x\sqrt{x^2+1}$이다.

이때 $g(0)=k$, $g(\sqrt{3})=0$이므로

$\int_0^{\sqrt{3}} g'(x)dx=0-k$이고, $g'(x)=-2x\sqrt{x^2+1}$을 대입하면

$\int_0^{\sqrt{3}}-2x\sqrt{x^2+1}\,dx=\int_1^4-\sqrt{s}\,ds=-\frac{14}{3}$이므로 $k=\frac{14}{3}$이다.

따라서 $f(1)=\frac{10}{3}$, $k=\frac{14}{3}$이므로 $f(1)+k=8$이다.

28.

정답: ②

해설:

step1

$a+b=5$인 경우: 24가지

$b+c=8$ 인 경우: 30 가지

이 중 겹치는 것은 $(a, b, c)=(1, 4, 4)$, $(2, 3, 5)$, $(3, 2, 6)$

곧, 전체 경우의 수: $54-3=51$ 가지

step2

$a\times b\times c$가 3의 배수인 경우를 표로 나타내면

a	b	c	가짓수
1	4	3의 배수	2
2	3	all	6
3	2	all	6
4	1	3의 배수	2
all	2	6	6
all	3	5	6
3의 배수	4	4	2
all	5	3	6
all	6	2	6

이 중 겹치는 것은 $(2, 3, 5)$, $(3, 2, 6)$

step3

그러므로 $1-\frac{40}{51}=\frac{11}{51}$이다.

29.

정답: 19

해설:

step1

(가)에서 $2g(0)=2\mathrm{P}\left(0\leq Z\leq \frac{4}{\sigma}\right)$

$f(t)$의 최댓값은 $\mathrm{P}\left(-\frac{1}{4}\leq Z\leq \frac{1}{4}\right)=2\mathrm{P}\left(0\leq Z\leq \frac{1}{4}\right)$이므로

$\sigma=16$이다.

step2

(나)에서 $f(-3)=\mathrm{P}\left(\frac{-3-m}{8}\leq Z\leq \frac{1-m}{8}\right)$

$g(-4)+g(-12)=\mathrm{P}\left(\frac{1}{4}\leq Z\leq \frac{1}{2}\right)+\mathrm{P}\left(-\frac{3}{4}\leq Z\leq -\frac{1}{2}\right)$

$=\mathrm{P}\left(\frac{1}{4}\leq Z\leq \frac{3}{4}\right)$

step3

그러므로 $\frac{-3-m}{8}$은 $-\frac{3}{4}$이거나 $\frac{1}{4}$이다.

m은 양수이므로, $m=3$이다.

따라서 $m+\sigma=19$이다.

30.

정답: 419

해설:

step1

(나) 조건을 만족시킬 수 있는 e의 값은 1또는 3이고,

1) $e=1$인 경우, a, b, c, d 에서 짝수 3개, 홀수 1개 존재하고

2) $e=3$인 경우, 전부 짝수이다.

step2

1) $a+b+c+d=15$ 또는 $a+b+c+d=17$이고,

a가 홀수라고 가정하고(추후 4를 곱해줌)

$a=2a'+1$, $b=2b'+2$, $c=2c'+2$, $d=2d'+2$ 라 할 때,

$a'+b'+c'+d'$은 4 또는 5이다.

곧, $4\times\left({}_4\mathrm{H}_4+{}_4\mathrm{H}_5\right)=364$

2) $a+b+c+d=14$ 또는 $a+b+c+d=16$이고,

$a=2a'+2$, $b=2b'+2$, $c=2c'+2$, $d=2d'+2$ 라 할 때,

$a'+b'+c'+d'$은 3 또는 4이다.

곧, ${}_4\mathrm{H}_3+{}_4\mathrm{H}_4=55$이다.

step3

따라서 $364+55=419$이다.

＊ 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인 하시오.