

레이와 6년(2024년) 도쿄공업대학 전기 모집 2차 시험
수학

실시일자: 2024년 2월 24일 09:30 (JST)

제한시간: 180분

배점: 300점

1. 좌표평면 위의 곡선 $y = -\frac{1}{2}x^2$ 과 점 $(a, \frac{1}{2}a^2)$ ($a > 0$)에서 접하는 원 중 y 축의 양의 부분과도 접하는 원을 S_a 라고 하고, 그 중 S_1 의 중심을 P라고 하자. 또한 $a > 0$ 에서 S_a 의 중심이 그리는 자취를 C라고 하자. 다음 물음에 답하시오.

【60점】

- (1) 점 P의 좌표를 구하시오.
(2) 곡선 C 위의 점 P에서의 접선의 기울기를 구하시오.

2. 실수 전체의 집합에서 정의된 미분가능한 함수 $f(t)$, $g(t)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) $f'(t) = -f(t)g(t)$
(나) $g'(t) = \{f(t)\}^2$
(다) $f(t) > 0$
(라) $|g(t)| < 1$
(마) $f(0) = 1$
(바) $g(0) = 0$

이때,

$$p(t) = \{f(t)\}^2 + \{g(t)\}^2, \quad q(t) = \ln \frac{1+g(t)}{1-g(t)}$$

라고 하자. 다음 물음에 답하시오.

【60점】

- (1) $p'(t)$ 를 구하시오.
(2) $q'(t)$ 가 상수함수임을 보이시오.
(3) $\lim_{t \rightarrow \infty} g(t)$ 를 구하시오.
(4) $f(T) = g(T)$ 인 양수 T에 대해, 매개변수로 나타낸 좌표평면 위의 곡선

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases} \quad (0 \leq t \leq T)$$

의 길이를 구하시오.

3. 좌표평면 위에 점 $A(a,0)$, $B(0,b)$, $C(-a,0)$ ($0 < a < b$)이 있다. 점 A, B 를 지나는 직선 l 에 대해 점 C 를 지나고 선분 BC 와 수직인 직선을 k 라고 하자. 점 A 를 지나고 y 축에 평행한 직선과 직선 k 의 교점을 C_1 이라고 하고, 점 C_1 을 지나고 x 축에 평행한 직선과 직선 l 의 교점을 A_1 이라고 하자. 자연수 n 에 대해 점 A_n 을 지나고 y 축에 평행한 직선과 직선 k 의 교점을 C_{n+1} 이라 하고, 점 C_{n+1} 을 지나고 x 축에 평행한 직선과 직선 l 의 교점을 A_{n+1} 이라고 하자. 다음 물음에 답하시오.

【60점】

- (1) 점 A_n 과 C_n 의 좌표를 구하시오.
- (2) 삼각형 CBA_n 의 넓이 S_n 을 구하시오.
- (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\overline{BA_n}}{\overline{BC}}$ 의 값을 구하시오.

4. 자연수 n 에 대해 n 개의 동전 C_1, C_2, \dots, C_n 이 있다. $k=1, 2, \dots, n$ 에 대해 동전 C_k 를 던져 앞이 나올 확률을 p_k 라 하고, 뒷면이 나올 확률을 $1-p_k$ 라 하자. 이 n 개의 동전을 동시에 던졌을 때 앞면이 나온 동전의 개수가 홀수면 이기는 놀이를 한다. 다음 물음에 답하시오.

【60점】

- (1) $p_k = \frac{1}{3}$ ($k=1, \dots, n$)일 때 이 놀이에서 이길 확률 X_n 을 구하시오.
- (2) $p_k = \frac{1}{2(k+1)}$ ($k=1, \dots, n$)일 때 이 놀이에서 이길 확률 Y_n 을 구하시오.
- (3) $n=3m$ (m 은 자연수)일 때, $k=1, \dots, 3m$ 에 대해

$$p_k = \begin{cases} \frac{1}{3m} & (k=1, \dots, m) \\ \frac{2}{3m} & (k=m+1, \dots, 2m) \\ \frac{1}{m} & (k=2m+1, \dots, 3m) \end{cases}$$

라고 하자. 이 놀이에서 이길 확률을 Z_{3m} 이라고 했을 때 $\lim_{m \rightarrow \infty} Z_{3m}$ 의 값을 구하시오.

5. 정수 a, b 의 순서쌍 (a, b) 에 대해 $f(x) = x^2 + ax + b$ 라고 할 때, 복소수의 범위에서 구한 x 에 대한 방정식 $f(x) = 0$ 의 모든 근 α 에 대해 $\alpha^n = 1$ 이 되도록 하는 자연수 n 이 존재하도록 하는 순서쌍 (a, b) 를 모두 구하시오.

【60점】