4. 자연수 n과 두 함수 $f(x)=e^x\sin x$, $g(x)=x^{4n}$에 대하여 함수 $h(x)$는 다음과 같다.

$$h(x)=\begin{cases}\dfrac{f^{(4n)}(x)}{g^{(4n-1)}(x)} & (x\neq 0)\\ \dfrac{2}{7!} & (x=0)\end{cases}$$ (단, $f^{(n)}$은 함수 f를 n번 미분한 함수이다.)

함수 $h(x)$가 모든 실수에서 연속일 때, $x\neq 0$에서 정적분 $\int_0^k t^{100}\left|f^{(4n)}(t)-g^{(4n-1)}(t)h(x)\right|dt$의 값이 최소가 되도록 하는 x의 값을 $m(k)$라고 하자. (단, $0<k\leq\dfrac{3\pi}{4}$) $\log_2 m(\sqrt{2})$의 값을 구하는 과정을 논술하시오.

((정답)) $\dfrac{25}{51}$

((해설))

$f(x)$의 도함수를 차례로 구하면 다음과 같다.

$f'(x)=e^x(\sin x+\cos x)$

$f''(x)=e^x(\sin x+\cos x)+e^x(\cos x-\sin x)=2e^x\cos x$

$f^{(3)}(x)=2e^x(\cos x-\sin x)$

$f^{(4)}(x)=2e^x(\cos x-\sin x-\sin x-\cos x)=-4e^x\sin x$

따라서 $f^{(4)}(x)=-4f(x)$이고 $f^{(4n)}(x)=(-4)^n e^x\sin x$이다.

비슷하게, $g^{(4n-1)}(x)=(4n)!x$이다. $h(x)$가 모든 실수에서 연속이므로 $x=0$에서

$$\lim_{x\to 0}\frac{(-4)^n e^x\sin x}{(4n)!x}=\lim_{x\to 0}\frac{(-4)^n e^x}{(4n)!}\times\frac{\sin x}{x}=\frac{2}{7!}$$

$$\frac{(-4)^n}{(4n)!}=\frac{2}{7!}$$

n은 짝수이므로 $n=2$ 부터 대입하면 $\dfrac{(-4)^2}{8!}=\dfrac{16}{8\times 7\times 6\times\cdots}=\dfrac{2}{7!}$ 을 만족하므로

$n=2$이다. 이제, $\int_0^k t^{100}\left|f^{(4n)}(t)-g^{(4n-1)}(t)h(x)\right|dt$를 정리하자. $x\neq 0$이고

$0<x<\dfrac{3\pi}{4}$에서 $h'(x)>0$이므로

$$\int_0^k t^{100}\left|f^{(4n)}(t)-g^{(4n-1)}(t)h(x)\right|dt=\int_0^k t^{100}g^{(4n-1)}(t)\left|\frac{f^{(4n)}(t)}{g^{(4n-1)}(t)}-h(x)\right|dt$$

$$=(4n)!\int_0^k t^{101}|h(t)-h(x)|dt=(4n)!\left\{\int_0^x(-t^{101}h(t)+t^{101}h(x))dt+\int_x^k(t^{101}h(t)-t^{101}h(x))dt\right\}$$

$$\approx-\int_0^x t^{101}h(t)dt+h(x)\frac{1}{102}x^{102}-\int_k^x t^{101}h(t)dt+h(x)\left\{\frac{1}{102}x^{102}-\frac{1}{102}k^{102}\right\}$$ (4n!은 생략)

$$\frac{d}{dx}\int_0^k t^{100}\left|f^{(4n)}(t)-g^{(4n-1)}(t)h(x)\right|dt$$

$$\approx-x^{101}h(x)+h'(x)\frac{1}{102}x^{102}+h(x)x^{101}-x^{101}h(x)+h'(x)\left\{\frac{1}{102}x^{102}-\frac{1}{102}k^{102}\right\}+h(x)x^{101}$$

$$=\frac{h'(x)}{102}(2x^{102}-k^{102})=0$$

따라서 $[m(k)]^{102}=[\frac{k}{2^{\frac{1}{102}}}]^{102}$, $m(k)=\frac{k}{\sqrt[102]{2}}$

$m(\sqrt{2})=2^{\frac{1}{2}-\frac{1}{102}}=2^{\frac{25}{51}}$ 이므로 구하는 값은 $\frac{25}{51}$ 이다.