처음에 문제를 봤을 때, (가) 조건에서는 특별하게 얻어낼 게 없습니다.

(나) 조건을 보면 $0<x_1<x_2$일 때, $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\geq 1$ (단, x_1, x_2는 실수) 인데,

$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\geq 1$ 부분을 보면 x_2-x_1은 항상 0보다 큼이 자명하므로 준식의 양변에 x_2-x_1을 곱해줄 수 있습니다.

곱하면 $f(x_2)-f(x_1)\geq x_2-x_1$이라고 쓸 수 있고 정리해주면, $f(x_2)-x_2\geq f(x_1)-x_1$이라 할 수 있습니다.

즉 $x>0$의 범위에서 $y=f(x)-x$는 증가함수임을 알 수 있습니다.

그 뒤 (가) 조건을 보면 $f(2)-f(0)=2$ 라는 조건이 존재하는데, 이 조건을 잘 바꿔주면 $f(2)-2=f(0)-0$으로 볼 수 있습니다. 즉 $y=f(x)-x$라는 함수가 $x=0$일 때와, $x=2$일 때의 함숫값이 같다는 의미입니다. 그런데 $y=f(x)-x$가 증가함수임이 (나)에 의해 밝혀졌으므로 $y=f(x)-x$는 닫힌구간 $[0,2]$에서 항상 일정한 값을 가짐을 알 수 있습니다. 그런데 $f(1)=1$이므로, 닫힌구간 $[0,2]$에서는 $f(x)-x=0$임을 알 수 있습니다.

다음으로, (다) 조건을 보면, $f'(x)=\sqrt{4-\{f(x)\}^2}\quad(x<0)$인데, 조건을 활용하면 $f'(x)\geq 0$과 $-2\leq f(x)\leq 2$임을 확인할 수 있습니다.

그리고 (가) 조건에서 $f(-4)=2$라는 조건을 활용하면 $-4\leq x<0$에서 상수함수를 유지하지 않으면 $f'(x)\geq 0$이라는 조건을 만족할 수 없으므로, $-4\leq x<0$에서 $f(x)$는 상수함수입니다.

따라서 $\int_{-4}^{-1}f(x)dx=6$임을 알 수 있습니다.

마지막으로 $y=f(x)-x$는 (나) 조건에 의해 증가함수인데, 닫힌구간 $(0,2]$에서 항상 값이 0인데, $\int_1^4 f(x)-x\,dx$가 최소 일 때, $\int_1^4 f(x)dx$도 최소이므로,

$\int_1^4 f(x)-x\,dx$의 최솟값은 0입니다. 따라서, $\int_1^4 f(x)dx$의 최솟값은 $\int_1^4 xdx=\frac{15}{2}$입니다.

따라서, $\int_{-4}^{-1}f(x)dx+\int_1^4 f(x)dx$의 최솟값은 $6+\frac{15}{2}=\frac{27}{2}$이므로, 답은 29입니다.

이것이 제가 의도한 풀이이지만 (나) 조건에서 평균값 정리를 쓰거나 뒷부분에서 최솟값을 구해낼 때, $f'(x)>1$인 것을 이용해 $f(x)$가 $x>0$에서 $y=x$일 때가 최소임을 추론해내도 좋은 풀이라고 생각합니다.